

# Корреляция и свертка

# 5

5.1. Введение	281
5.2. Описание корреляции	282
5.3. Описание свертки	311
5.4. Реализация корреляции и свертки	339
5.5. Примеры применения	339
5.6. Резюме	347
Задачи	348
Литература	353
Приложение	354

В данной главе объясняется природа процесса корреляции, которая затем иллюстрируется на примерах вычисления функций взаимной корреляции и автокорреляции. Описано подавление шумовой составляющей сигнала с помощью корреляции и техника быстрой корреляции с использованием БПФ. Тема свертки рассматривается примерно по той же схеме, что и тема корреляции. В описании включены круговая и линейная свертка, быстрая линейная свертка и метод сегментов (наложение-сложение, наложение-запись), необходимый при обработке значительных массивов входных данных. Кроме того, рассматривается обращенная свертка, устанавливается связь между корреляцией и сверткой. В завершение главы рассказано о реализации корреляции и свертки и разобрано несколько примеров применения этих процедур.

## 5.1. Введение

Часто бывает необходимо определить степень независимости одного процесса от другого или установить сходство одного набора данных с другим. Другими словами, искомой является корреляция процессов или данных, которую можно определить математически и измерить. Вообще, процесс корреляции занимает значительное место в обработке сигналов. Этот математический аппарат нашел применение в обработке изображений в сфере компьютерного зрения или дистанционного зондирования со спутников, в которых сравниваются данные с различных изображений, в радарных или гидроакустических установках для дальнометрии и местоопределения (пеленгации), в которых сравниваются переданные и отраженные сигналы. Он используется в детектировании и идентификации сигналов в шуме, в организации технического контроля для наблюдения за влиянием входа на выход, в идентификации двоичных кодовых

слов в системе с импульсно-кодовой модуляцией, в обычных схемах оценки по методу наименьших квадратов и во многих других областях, например, в климатологии. Корреляция также является неотъемлемой частью процесса свертки, который, по сути, — та же корреляция двух последовательностей данных, при вычислении которой одна из последовательностей обращена во времени. Это означает, что для вычисления корреляции и свертки могут использоваться одни и те же алгоритмы, только в случае свертки одна из последовательностей обращается. Отметим также, что спектр записанного сигнала состоит из свертки спектра сигнала со спектром вырезающей функции.

Определение импульсной характеристики неизвестной системы называется *идентификацией системы*. Определение неизвестного выхода по импульсной характеристике системы и выходу называется *обращением свертки* (нахождением оригинала функции). Если импульсная характеристика неизвестна, определение искомого входного сигнала называется *слепым обращением свертки* (blind deconvolution). Все эти важные темы рассмотрены ниже.

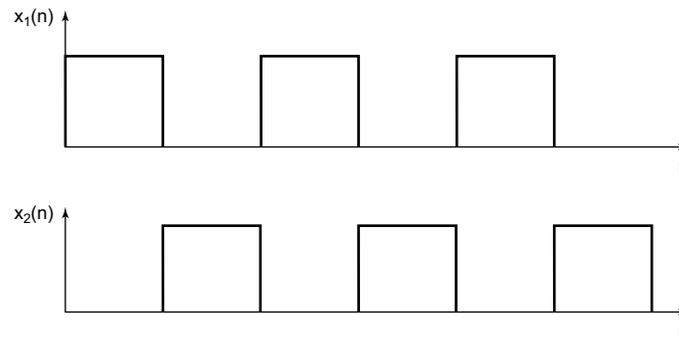
## 5.2. Описание корреляции

Рассмотрим, как можно сравнить две последовательности данных, состоящие из значений, одновременно выбираемых из двух соответствующих сигналов. Если два сигнала похоже меняются при переходе от точки к точке, то меру их *корреляции* можно вычислить, взяв сумму произведений соответствующих пар точек. Данное предложение становится более аргументированным, если рассмотреть две независимые и случайные последовательности данных. В этом случае сумма произведений стремится к исчезающе малому случайному числу по мере увеличения пар точек. Это объясняется тем, что все числа, положительные и отрицательные, равновероятны, так что пары произведений компенсируются при сложении. В то же время, если сумма конечна, это указывает на наличие корреляции. Отрицательная сумма указывает на отрицательную корреляцию, т.е. увеличение одной переменной связано с уменьшением другой. Таким образом, взаимную корреляцию  $r_{12}(n)$  двух последовательностей данных  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , содержащих по  $N$  элементов, можно записать как

$$r_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n).$$

Впрочем, такое определение взаимной корреляции дает результат, который зависит от числа взятых точек. Чтобы это исправить, результат нормируется на число точек (делится на  $N$ ). Данную операцию можно также рассматривать как усреднение суммы произведений. Итак, получаем следующее улучшенное определение:

$$r_{12} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n).$$



**Рис. 5.1.** Сигналы со 100%-ной корреляцией, идущие не в фазе, — при нулевой задержке корреляция равна нулю

### Пример 5.1

Ниже иллюстрируется расчет  $r_{12}$ . Число точек данных в последовательности равно  $n$ , используются последовательности  $x_1$  и  $x_2$ .

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_1$	4	2	-1	3	-2	-6	-5	4	5
$x_2$	-4	1	3	7	4	-2	-8	-2	1

$$\begin{aligned}
 r_{12} &= \frac{1}{9}(4 \times (-4) + 2 \times 1 + (-1) \times 3 + 3 \times 7 + (-2) \times 4 + (-6) \times (-2) + \\
 &\quad + (-5) \times (-8) + 4 \times (-2) + 5 \times 1) = \\
 &= 5.
 \end{aligned}$$

Впрочем, чтобы данное определение можно было использовать, его также нужно модифицировать. В некоторых случаях корреляция, определенная указанным выше способом, может быть нулевой, хотя две последовательности коррелируют на 100%. Это может произойти, например, когда два сигнала идут не в фазе (как часто и бывает). Данная ситуация иллюстрируется сигналами на рис. 5.1. На рисунке показано, что каждая пара произведений в функции корреляции равна нулю, следовательно, вся корреляция равна нулю, поскольку нулю всегда равно одно из значений  $x_1$  или  $x_2$ . Впрочем, очевидно, что сигналы сильно коррелируют, хотя и идут не в фазе. Разность фаз может, например, объясняться тем, что  $x_1$  — некий эталонный сигнал, а  $x_2$  — запаздывающий выход схемы. Чтобы преодолеть подобный сдвиг фаз, необходимо сдвинуть (или задержать) один из сигналов относительно другого. Обычно, чтобы выровнять сигналы перед определением корреляции,  $x_2$  смещается влево. Как показано на рис. 5.2, это эквивалентно замене  $x_2(n)$  на  $x_2(n + j)$ , где  $j$  представляет величину задержки — число точек выборки, на которое  $x_2$  смещается влево. Альтернативной и эквивалентной процедурой является смещение  $x_1$  вправо. В результате получаем такую формулу для взаимной корреляции:

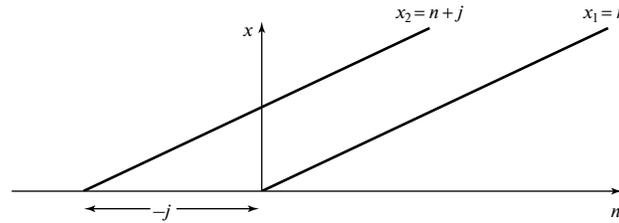


Рис. 5.2. Сигнал  $x_2 = x_1 + j$ , смещенный на  $j$  промежутков времени влево от сигнала  $x_1$

$$\begin{aligned}
 r_{12}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n+j) = \\
 &= r_{12}(-j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)x_1(n-j).
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

На практике, когда два сигнала коррелируют, их фазовая связь скорее всего неизвестна, так что корреляцию нужно находить для нескольких различных задержек, чтобы установить наибольшее значение корреляции, которое затем считается истинным.

### Пример 5.2

Рассмотрим взаимную корреляцию указанных выше двух последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  с задержкой  $j = 3$ , т.е.  $r_{12}(3)$ . Итак, используются следующие последовательности:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_1$	4	2	-1	3	-2	-6	-5	4	5
$x_2$	7	4	-2	-8	-2	-1			

так что

$$\begin{aligned}
 r_{12}(3) &= \frac{1}{9}(4 \times 7 + 2 \times 4 + (-1) \times (-2) + 3 \times (-8) + (-2) \times (-2) + \\
 &\quad + (-6) \times (-1)) = 2,667.
 \end{aligned}$$

Разумеется, также можно рассмотреть корреляцию в непрерывной временной области, и некоторые аналоговые схемы корреляции организованы именно так. В непрерывной области  $n \rightarrow t$  и  $j \rightarrow \tau$  и

$$r_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t+\tau)dt.
 \tag{5.2}$$

В то же время, если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — периодические с периодом  $T$ , формула (5.2) упрощается до

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t+\tau)dt.
 \tag{5.3}$$

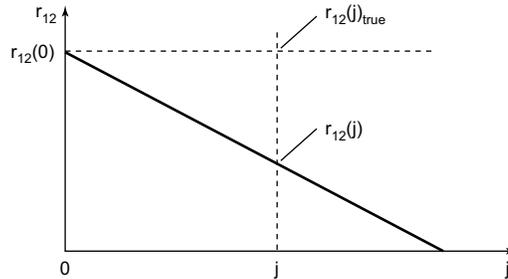


Рис. 5.3. Влияние краевого эффекта на взаимную корреляцию  $r_{12}(j)$

Если данные — это сигналы с конечной энергией, например, непериодические импульсообразные сигналы, то усреднение по времени  $T$  при  $T \rightarrow \infty$  не выполняется, поскольку в этом случае было бы  $1/T \rightarrow 0$  и  $1/T \rightarrow 0$ , и  $r_{12}(\tau)$  было бы исчезающе малой величиной. В таком случае используется следующая формула:

$$r_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t + \tau). \quad (5.4)$$

На практике обрабатываются будут записи конечной длины, так что применяются формулы (5.1) или (5.5):

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t)x_2(t + \tau)dt. \quad (5.5)$$

Есть и другая сложность, связанная с нахождением взаимной корреляции последовательностей данных конечной длины. Это иллюстрирует приведенный выше пример, в котором было найдено значение  $r_{12}(3) = 2,667$ . При смещении  $x_2$  влево сигналы уже не перекрываются, и данные в конце последовательностей не формируют парные произведения — возникает так называемый *краевой эффект*. В рассмотренном примере число пар при задержке 3 уменьшилось с девяти до шести. В результате наблюдалось линейное уменьшение  $r_{12}(j)$  при увеличении  $j$ , и получены спорные значения  $r_{12}(j)$ . Одно из возможных решений возникшей проблемы заключается в том, чтобы длину одной последовательности сделать в два раза больше длины, необходимой для нахождения корреляции. Для этого можно записать больше данных или, если одна из последовательностей периодична, повторить последовательность (особое внимание следует обратить на согласование краев). Другое возможное решение — скорректировать все рассчитанные значения. На рис. 5.3 показано уменьшение  $r_{12}$  с ростом  $j$  в результате краевого эффекта, т.е. реальное изменение  $r_{12}(j)$  не показано. При  $j = 0$ ,  $r_{12}(j) = r_{12}(0)$ , что можно вычислить. При  $j = N$ ,  $r_{12}(N) = 0$ , поскольку сигналы уже не перекрываются. В промежуточных случаях при некоторых значениях задержки  $j$  истинное значение  $r_{12}(j)$  равно  $r_{12}(j)_{\text{true}}$ , тогда как действительное значение, искаженное краевым эффектом, равно  $r_{12}(j)$ . Далее на основе рисунка получаем

$$\frac{r_{12}(j)_{\text{true}} - r_{12}(j)}{j} = \frac{r_{12}(0)}{N},$$

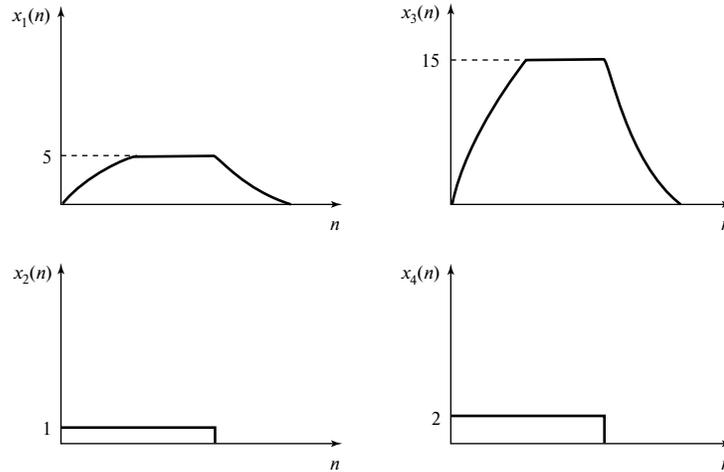


Рис. 5.4. Пары сигналов  $\{x_1(n), x_2(n)\}$  и  $\{x_3(n), x_4(n)\}$  различных амплитуд, но с равными взаимными корреляциями

откуда

$$r_{12}(j)_{\text{true}} = r_{12}(j) + \frac{j}{N} r_{12}(0). \quad (5.6)$$

Таким образом, вычисленные значения взаимной корреляции легко скорректировать для учета краевых эффектов, прибавив к  $r_{12}(j)$  величину  $j r_{12}(0)/N$ .

Значения функции взаимной корреляции вычисляются согласно приведенным выше формулам в зависимости от абсолютных значений данных. Часто бывает необходимо измерить взаимную корреляцию в фиксированном масштабе между  $-1$  и  $+1$ . Чтобы определить значения из указанного диапазона, полученные величины нормируют на величину, зависящую от энергетического содержания данных. Например, рассмотрим две пары сигналов  $x_1(n), x_2(n)$  и  $x_3, x_4(n)$ . Значения элементов данных приведены в таблице ниже.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1(n)$	0	3	5	5	5	2	0,5	0,25	0
$x_2(n)$	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$x_3(n)$	0	9	15	15	15	6	1,5	0,75	0
$x_4(n)$	2	2	2	2	2	0	0	0	0

Как показано на рис. 5.4, сигналы  $x_1(n)$  и  $x_3(n)$  подобны и отличаются только амплитудой. То же справедливо для пары  $x_2(n)$  и  $x_4(n)$ . Таким образом, корреляция между  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  равна корреляции между  $x_3(n)$  и  $x_4(n)$ . В то же время, параметры корреляции  $r_1$  и  $r_{34}(1)$  равны соответственно 1,47 и 8,83. Они отличаются, поскольку зависят от абсолютных значений элементов данных. Чтобы поправить эту ситуацию, нормируем взаимную корреляцию  $r_{12}(j)$  на коэффициент

$$\left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) \times \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2(n) \right]^{1/2} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2(n) \right]^{1/2} \quad (5.7)$$

и подобным образом нормируем  $r_{34}(j)$ . В результате нормированное выражение для  $r_{12}(j)$  приобретает такую форму:

$$\rho_{12}(j) = \frac{r_{12}(j)}{\frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2(n) \right]^{1/2}}. \quad (5.8)$$

Величина  $\rho_{12}(j)$  известна как *коэффициент взаимной корреляции*. Значение этого коэффициента всегда лежит между  $-1$  и  $+1$ , причем “ $+1$ ” означает 100%-ную корреляцию в прямом смысле, “ $-1$ ” — 100%-ную корреляцию в противоположном смысле, например, как для сигналов в противофазе. Значение “ $0$ ” указывает на нулевую корреляцию. Это означает, что сигналы совершенно независимы, например, если один из сигналов абсолютно случаен. Малые значения  $\rho_{12}(j)$  указывают на незначительную корреляцию. Нормировочный коэффициент для  $r_{12}(j)$  из приведенного выше примера равен

$$\frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2(n) \right]^{1/2} = \frac{1}{9} (88,31 \times 6)^{1/2} = 2,56,$$

а для  $r_{34}(j)$  —

$$\frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2(n) \right]^{1/2} = \frac{1}{9} (794,8 \times 24)^{1/2} = 15,35.$$

Следовательно,

$$\rho_{12}(1) = \frac{r_{12}(1)}{2,56} = \frac{1,47}{2,56} = 0,57$$

и

$$\rho_{34}(1) = \frac{r_{34}(1)}{15,34} = \frac{8,83}{15,35} = 0,58.$$

Теперь  $\rho_{12}(1) = \rho_{34}(1)$ , откуда видно, что данный процесс нормировки действительно позволяет независимо сравнивать взаимные корреляции абсолютных значений данных.

Рассмотрим частный случай  $x_1(n) = x_2(n)$ , т.е. найдем корреляцию сигнала с самим собой. Данный процесс называется *автокорреляцией*. Автокорреляционная функция сигнала определяется как

$$r_{11}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_1(n+j).$$

Автокорреляционная функция имеет одно весьма полезное свойство:

$$r_{11}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) = S,$$

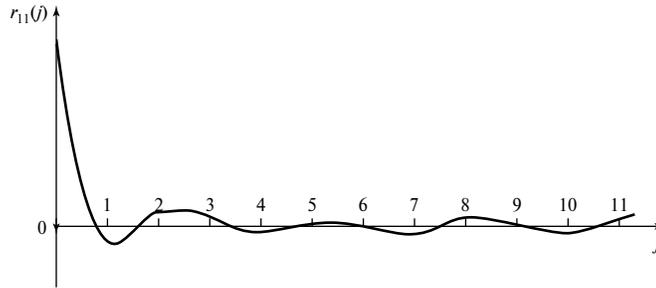


Рис. 5.5. Автокорреляционная функция случайного сигнала

где  $S$  — нормированная энергия сигнала. В результате получаем метод расчета энергии сигнала. Если сигнал абсолютно случаен, например, сигнал, соответствующий белому гауссову шуму в электрической системе, его автокорреляция будет максимальной при нулевой задержке и уменьшаться до случайных флуктуаций малой амплитуды возле нуля для задержек, превышающих единицу (см. рис. 5.5). Кроме того, справедливо следующее соотношение:

$$r_{11}(0) \geq r_{11}(j).$$

### 5.2.1. Взаимная корреляция и автокорреляция

Определение взаимной корреляции двух периодических последовательностей неравной длины требует аккуратности. Это объясняется тем, что результат корреляции будет повторяться с периодом более короткой последовательности. Этот результат не отражает полной периодичности более длинной последовательности, следовательно, неверен. Продемонстрируем это, найдя взаимную корреляцию  $r_{ab}(j)$  последовательностей  $a = \{4, 3, 1, 6\}$  и  $b = \{5, 2, 3\}$ . Последовательность  $b$  записывается под  $a$  и поэтапно смещается на одну позицию влево, в последнем столбце записываются соответствующие значения взаимной корреляции.

Последовательность	Задержка	$r_{ab}(j)$	
4 3 1 6			
3 5 2 3	0	47	
5 2 3 5	1	59	
2 3 5 2	2	34	
3 5 2 3	3	47	$r_{ab}(j)$ повторяется
5 2 3 5	4	59	

и т.д.

Результат показывает, что  $r_{ab}(j)$  циклично с периодом в три задержки, т.е. период  $r_{ab}(j)$  равен периоду более короткой последовательности  $b$ . Описанная процедура называется *циклической корреляцией*. Чтобы получить правильное значение, в котором каждое значение  $a$  умножается на каждое значение  $b$ , все элементы  $b$  нужно последовательно сместить под каждым значением  $a$ :

```

      4 3 1 6
        5 2 3
          5 2 3
            5 2 3
              5 2 3
                5 2 3
                  5 2 3

```

Видно, что для того, чтобы последовательность  $b$  стала повторяться, требуется 6 задержек. Длины последовательностей равны 4 и 3, а число требуемых задержек —  $4 + 3 - 1 = 6$ . Таким образом, получаем общее правило нахождения линейной взаимной корреляции двух периодических последовательностей длины  $N_1$  и  $N_2$ : дополнить нулями каждую последовательность, чтобы их длины были равны  $N_1 + N_2 - 1$  (т.е. добавить  $N_2 - 1$  нулей к последовательности длиной  $N_1$  и  $N_1 - 1$  нулей к последовательности длиной  $N_2$ ). Ниже сказанное иллюстрируется для указанных выше последовательностей  $a$  и  $b$ .

Последовательность	Задержка	$r_{ab}(j)$
4 3 1 6 0 0	0	29
5 2 3 0 0 0	1	17
2 3 0 0 0 5	2	12
3 0 0 0 5 2	3	30
0 0 0 5 2 3	4	17
0 0 5 2 3 0	5	35
0 5 2 3 0 0	6	29

$r_{ab}(j)$  повторяется

Следовательно, искомая взаимная корреляция  $a$  и  $b$  равна

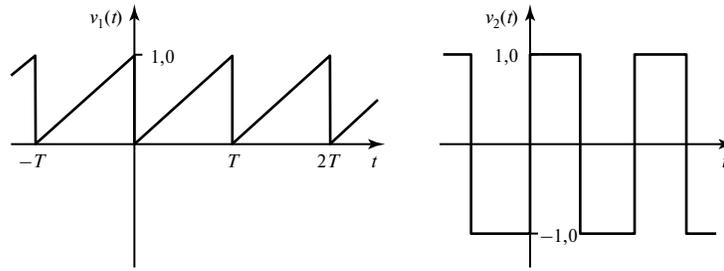
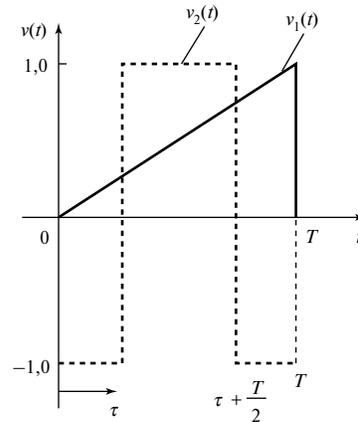
$$r_{ab}(j) = \{29, 17, 12, 30, 17, 35\}.$$

Выше предполагалось, что в моменты нахождения взаимной корреляции используются чисто цифровые данные, но взаимную корреляцию можно также посчитать аналитически, если сигнал записывается в явной (аналитической) форме. На практике эквивалент описанной аналитической процедуры применяется в аналоговых схемах взаимной корреляции. Ниже приводится пример аналитического расчета взаимной корреляции.

### Пример 5.3

Найдите взаимную корреляцию  $r_{12}(-\tau)$  двух сигналов  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ , изображенных на рис. 5.6.

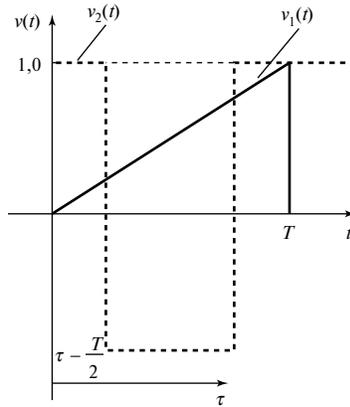
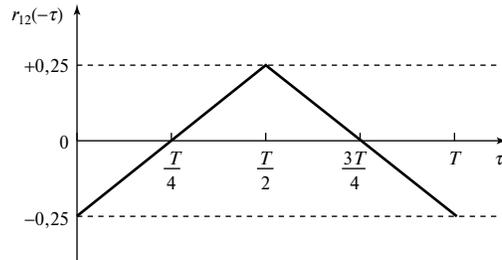
Требуемые сигналы легко записать аналитически, разделив их на прямолинейные сегменты. Это достаточно сделать для одного периода сигнала  $T$ , поскольку  $r_{12}(-\tau)$  будет периодическим по  $\tau$  с периодом  $T$ . Следовательно, для  $0 \leq t \leq T$ ,  $v_1(t) = t/T$  и для  $0 \leq t \leq T/2$ ,  $v_2(t) = 1, 0$ , а для  $T/2 \leq t \leq T$ ,  $v_2(t) = -1, 0$ . Далее требуется получить выражение для  $r_{12}(-\tau)$ , т.е.  $v_2(t)$  (прямоугольный сигнал) необходимо сместить вправо относительно  $v_1(t)$ . Для  $0 \leq \tau \leq T/2$  соответствующая иллюстрация приведена

Рис. 5.6. Сигналы  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  (пример 5.3)Рис. 5.7. Сегменты  $v_2(t)$  для  $\theta \leq \tau \leq T$ 

на рис. 5.7, из которого видно, что  $v_1(t)$  нужно умножить на три последовательных сегмента  $v_2(t)$ , в которых значения  $v_2(t)$  равны  $-1, 1, -1$ . Для  $T/2 \leq \tau \leq T$  необходимая иллюстрация приведена на рис. 5.8, на котором последовательные значения  $v_2(t)$  изменились на  $1, -1, +1$ . Это означает, что решение состоит из двух частей, которые нужно согласовать в точке  $\tau = T/2$ .

Разобьем взаимную корреляцию на три сегмента с границами в точках  $t = \tau$ ,  $t = \tau + T/2$  и  $t = T$  (см. рис. 5.7). Далее получаем

$$\begin{aligned}
 r_{12}(-\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t)v_2(t-\tau)dt = \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{\tau} \frac{t}{T}(-1)dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T/2} \frac{t}{T}(1)dt + \frac{1}{T} \int_{\tau+T/2}^T \frac{t}{T}(-1)dt = \quad (5.9) \\
 &= \frac{-1}{T^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{\tau} + \frac{1}{T^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{\tau}^{\tau+T/2} - \frac{1}{T^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{\tau+T/2}^T,
 \end{aligned}$$

Рис. 5.8. Сегменты  $v_2(t)$  для  $T/2 \leq \tau \leq T$ Рис. 5.9. Величина  $r_{12}(-\tau)$  как функция  $\tau$ 

$$r_{12}(-\tau) = -\frac{1}{4} + \frac{\tau}{T} \text{ для } 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}.$$

Для  $T/2 \leq \tau \leq T$ , используя рис. 5.8, получаем

$$r_{12}(-\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{\tau-T/2} \frac{t}{T}(1)dt + \frac{1}{T} \int_{\tau-T/2}^{\tau} \frac{t}{T}(-1)dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^T \frac{t}{T}(1)dt \quad (5.10)$$

$$r_{12}(-\tau) = \frac{3}{4} - \frac{\tau}{T} \text{ для } \frac{T}{2} \leq \tau \leq T.$$

Подставляя  $\tau = T/2$  в формулы (5.9) и (5.10), определяем, что в обоих случаях  $r_{12}(-\tau) = 1/4$ , откуда следует, что функции согласованы правильно. График зависимости  $r_{12}(-\tau)$  от  $\tau$  для  $0 \leq \tau \leq T$  изображен на рис. 5.9.

Отметим некоторые моменты, связанные с последствиями использования при вычислении корреляции данных конечной длины. Другими словами, чем отличается использование формулы (5.5.), в которой  $T$  конечно, вместо формулы (5.2)?

Для ответа на этот вопрос можно рассмотреть всего один синусоидальный Фурье-компонент сигнала. Формула (5.2) дает верную автокорреляцию, где  $T > T_p$  ( $T_p$  — период синусоиды). Следовательно,

$$\begin{aligned} r_{11}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \sin(\omega t) A \sin(\omega t + \tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2} \left[ \cos(\omega \tau) - \frac{\cos(\omega T)}{2\omega T} \sin(\omega \tau) \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Изучая данное уравнение, находим, что второе слагаемое в скобках стремится к нулю при  $T \rightarrow \infty$ , так что если  $T \neq \infty$  — это указывает на ошибку. Член  $\cos(\omega T)$  представляет периодическое влияние ошибки, а член  $1/2\omega T$  — тенденцию в ошибку. Следовательно, при рассмотрении длины корреляции  $T$  ошибки больше для более коротких последовательностей, кроме того, они максимальные для низкочастотных компонентов сигнала. Ошибки также периодичны по  $\tau$ .

Член  $\cos(\omega T)$  дает наименьшие ошибки при  $\omega T = [(2n + 1)/2]\pi$ . Поскольку  $\omega = 2\pi/T_p$  и искомыми являются большие значения  $T$ , это соответствует

$$T \geq (2n + 1) \frac{T_p}{4}. \quad (5.12)$$

Член  $\sin(\omega \tau)$  дает наименьшее значение при  $\omega \tau = m\pi$ , где  $m$  — целое. Следовательно,

$$\tau = \frac{m}{2} T_p. \quad (5.13)$$

Теперь следует сделать несколько разумных предположений. Допустим, что условию большого  $T$  удовлетворяет  $N \geq 10$ . Тогда  $T \geq nT_p/2$  или

$$T \geq 5T_p. \quad (5.14)$$

Из уравнения (5.13) находим, что наибольшее разрешенное значение  $\tau$  для самого низкочастотного компонента  $m = 1$  удовлетворяет условию

$$\tau < T_p. \quad (5.15)$$

Объединяя неравенства (5.14) и (5.15), получаем

$$\tau \leq T/5.$$

Это означает, что при нахождении корреляции сигналов ошибки, вызванные конечными длинами последовательностей данных, можно минимизировать следующим образом:

- 1) гарантировать, что  $T \geq 5T_p$ , где  $T_p$  соответствует наименьшему значимому частотному компоненту;
- 2) совмещать данные не более чем на 20% их длины.

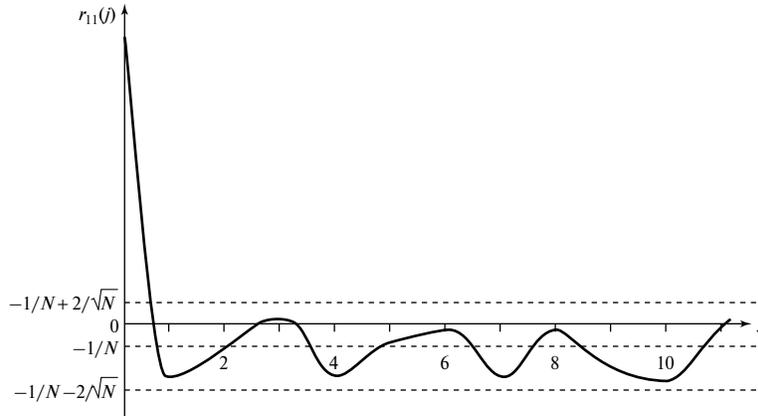


Рис. 5.10. Автокорреляционная функция случайного сигнала

Таким образом, например, если нужно найти корреляцию телефонного речевого сигнала с полосой 300–3400 Гц и того же сигнала, дискретизованного с частотой 40 кГц,  $T_p = 1/300 = 3,3 \times 10^{-3}$  с. Наименьшая приемлемая длина данных составляет  $5 \times 3,3 \times 10^{-3}$  с = 16,7 мс, а максимальное смещение при нахождении корреляции — 3,33 мс, или 133 точки данных.

На рис. 5.10 приведен график  $\rho_{11}(j)$  коэффициента автокорреляции чисто случайного сигнала, например, белого шума. Можно показать, что математическое ожидание  $r_{11}(j)$  равно  $E[r_{11}] \approx -1/N$  [4], где  $N$  — число точек данных, а дисперсия равна  $\text{var}[r_{11}(j)] \approx 1/N$ . На рисунке показано математическое ожидание  $-1/N$ , а также доверительные границы по уровню 95%  $-1/N$ , равные  $\pm 2/N^{1/2}$ . Значения  $r_{11}(j)$ , которые не входят в эти доверительные пределы, могут быть значительными, т.е. они могут указывать, что сигнал не совсем случаен. При этом следует отметить, что одна точка из 20 может выходить за указанные пределы, даже если сигнал абсолютно случаен. Случайный сигнал  $r_{11}(j)$  должен входить в доверительные границы по уровню 95% за одну-две задержки. Чтобы действительно гарантировать, что сигнал случайный, нужен определенный опыт и некоторые дополнительные действия. Например, в работе [7] рекомендуется использовать предварительное “отбеливание” данных (устранение белого шума).

Автокорреляционная функция периодического сигнала также является периодическим сигналом. Данное утверждение легко доказать. Периодический сигнал  $x(t)$  с периодом  $T$  удовлетворяет условию

$$x(t) = x(t + nT),$$

так что

$$r_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau)dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau + nT)dt \quad (5.16)$$

$$r_{11}(\tau) = r_{11}(\tau + nT).$$

Следовательно, сигнал  $r_{11}(\tau)$  периодический по  $\tau$  с периодом  $T$ . Данное свойство полезно, поскольку позволяет детектировать периодические сигналы в шуме при небольших отношениях сигнал-шум. Нахождение автокорреляции сигнала обычно снижает шум, при этом проявляя периодическую автокорреляционную функцию сигнала. При необходимости после детектирования можно выполнять дальнейшую обработку сигнала, чтобы определить его форму.

Из уравнения (5.11) видно, что автокорреляционная функция сигнала  $A \sin(\omega t)$  равна  $(A^2/2) \cos(\omega \tau)$ . Поскольку амплитуда автокорреляционной функции связана просто с амплитудой сигнала, ее можно использовать для оценки амплитуды сигнала. Приведем другой распространенный пример — прямоугольный сигнал амплитуды  $A$ , амплитуда автокорреляционной функции которого равна  $A^2$ , а сама функция имеет треугольную форму. Наконец, следует отметить, что автокорреляционные функции не уникальны. Это означает, что различные сигналы могут иметь одинаковые корреляционные функции. Таким образом, по найденной автокорреляционной функции нельзя определить форму сигнала.

Рассмотрим задачу, в которой сигнал  $v(t)$  частично случайный. Итак, изучается зашумленный сигнал, который можно записать как сумму полезного сигнала  $s(t)$  и шума  $q(t)$ . Таким образом,

$$v(t) = s(t) + q(t), \quad (5.17)$$

причем предполагается, что  $s(t)$  и  $q(t)$  не коррелируют. Выборочная автокорреляционная функция  $v(t)$ , равная  $r_{vv}(j)$ , записывается следующим образом:

$$r_{vv}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [s(n) + q(n)][s(n+j) + q(n+j)] = \quad (5.18)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)s(n+j) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)q(n+j) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q(n)s(n+j) + \quad (5.19)$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q(n)q(n+j) =$$

$$\begin{aligned} &= r_{ss}(j) + E[s(n)q(n+j)] + E[q(n)s(n+j)] + E[q(n)q(n+j)] = \\ &= r_{ss}(j) + E[s(n)]E[q(n+j)] + E[q(n)]E[s(n+j)] + E[q(n)]E[q(n+j)] = \\ &= r_{ss}(j) + \overline{s(n)q(n)} + \overline{q(n)s(n)} + \overline{q(n)}^2 = \\ &= r_{ss}(j) + 2\overline{sq} + \overline{q}^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

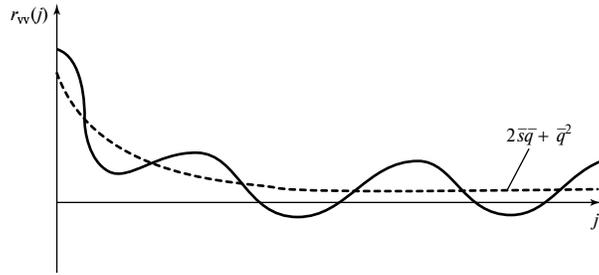


Рис. 5.11. Автокорреляционная функция зашумленного сигнала

Теперь  $\bar{q} \rightarrow 0$  для больших  $N$ , для которых

$$r_{vv}(j) \rightarrow r_{ss}(j). \quad (5.21)$$

Для меньших  $N$  слагаемые взаимной корреляции в формуле (5.19) и автокорреляция шумовой составляющей стремятся к нулю с увеличением задержки  $j$ .

Таким образом, видно, что автокорреляционная функция частично случайного или зашумленного сигнала состоит из автокорреляционной функции сигнального компонента, на которую накладывается затухающая шумовая функция, зависящая от случайного компонента и полезного сигнала, и которая затухает до значения  $2\bar{s}\bar{q} + \bar{q}^2$ . Следовательно, график зависимости  $r_{vv}(j)$  от  $j$  отражает периодичность  $s(t)$  при условии  $|r_{ss}(j)| > |(2\bar{s}\bar{q} + \bar{q}^2)|$  (см. рис. 5.11). В результате получаем метод определения периода сигнала в шуме (см. раздел 5.2.2).

#### Пример 5.4

Найдите функцию взаимной корреляции двух зашумленных сигналов.

Дано два сигнала  $\{s_1(t) + q_1(t)\}$  и  $\{s_2(t) + q_2(t)\}$ . Их выборочная взаимная корреляция  $r_{12}(j)$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{12}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\{s_1(n) + q_1(n)\} \{s_2(n+j) + q_2(n+j)\}] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [s_1(n)s_2(n+j) + s_1(n)q_2(n+j) + q_1(n)q_2(n+j)] = \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_1(n)q_2(n+j) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q_1(n)s_2(n+j) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q_1(n)q_2(n+j) = \\ &= r_{s_1s_2}(j) + r_{s_1q_2}(j) + r_{q_1s_2} + r_{q_1q_2}(j). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Как и в предыдущей задаче, последние три члена в правой части уравнения (5.23) затухают до нуля с увеличением задержки  $j$ . Для больших  $N$  уравнение (5.23) записывается следующим образом:

$$r_{12}(j) = r_{s_1 s_2}(j) + \overline{s_1 q_2} + \overline{q_1 s_2} + \overline{q_1 q_2}. \quad (5.24)$$

Таким образом, при увеличении  $N$   $r_{12}(j) \rightarrow r_{s_1 s_2}(j)$ , функции взаимной корреляции двух сигналов.

Проведенный выше анализ демонстрирует, что функции взаимной корреляции и автокорреляции позволяют проявить свойства сигнала, снижая шумовую составляющую.

## 5.2.2. Применение корреляции

### 5.2.2.1. Расчет спектральной плотности энергии и энергетического содержимого сигнала

Можно показать, что

$$F[r_{11}(\tau)] = G_E(f), \quad (5.25)$$

где  $G_E(f)$  — спектральная плотность энергии сигнала, т.е. спектральная плотность энергии и автокорреляционная функция являются Фурье-образами друг друга.

Далее можно показать, что

$$r_{11}(0) = E, \quad (5.26)$$

где  $E$  — общая энергия сигнала.

### Пример 5.5

Найдите связь между корреляционными функциями с нулевой задержкой двух различных сигналов и их общим энергетическим содержанием.

Обозначим сигналы  $v_1(n)$  и  $v_2(n)$ , а их сумму —  $V(n) = v_1(n) + v_2(n)$ . Автокорреляционная функция сигнала с нулевой задержкой  $V(n)$  равна

$$r_{vv}(0) = E_v = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [v_1(n) + v_2(n)]^2,$$

где  $E_v$  — энергия сигнала  $V(n)$ .

$$\begin{aligned} E_v &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [v_1^2(n) + v_2^2(n) + 2v_1(n)v_2(n)] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v_1^2(n) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v_2^2(n) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v_1(n)v_2(n), \end{aligned}$$

так что

$$E_v = r_{v_1}(0) = r_{v_2}(0) + 2r_{v_1v_2}(0). \quad (5.27)$$

Полученное уравнение является одной из форм искомого результата. Альтернативным образом результат можно записать так:

$$E_V = E_{v_1} + E_{v_2} + 2r_{v_1v_2}(0). \quad (5.28)$$

Итак, энергия сигнала  $V(n)$  равна сумме энергий его компонентов плюс  $2r_{v_1v_2}(n)$ , где  $r_{v_1v_2}(n)$  — функция взаимной корреляции с нулевой задержкой сигналов  $v_1(n)$  и  $v_2(n)$ . Если  $v_1(n)$  и  $v_2(n)$  не коррелируют, общая энергия является просто суммой энергий компонентов.

Если сигналы  $v_1(n)$  и  $v_2(n)$  зашумленные и  $v_1(n) = v'_1(n) + q_1(n)$  и  $v_2(n) = v'_2(n) + q_2(n)$ , легко показать, что

$$E_V = E_{v'_1} + E_{v'_2} + E_{q_1} + E_{q_2} + r_{v'_1v'_2}(0). \quad (5.29)$$

### 5.2.2.2. Детектирование и оценка периодических сигналов в шуме

Рассмотрим использование взаимной корреляции для детектирования и оценки периодических сигналов в шуме. Известно, что сигнал, спрятанный в шуме, можно оценить, найдя его взаимную корреляцию с настраиваемым шаблонным (“эталонным”) сигналом. Шаблон настраивается методом проб и ошибок с использованием любых предварительных знаний, пока функция взаимной корреляции не достигнет максимального значения. Для подкрепления этого предложения можно обратиться к уравнению (5.22), предполагая, что для шаблона  $q_2(n) = 0$ . При таком условии уравнение (5.23) переходит в следующее:

$$r_{12}(j) = r_{s_1s_2}(j) + r_{q_1s_2}(j) = \quad (5.30)$$

$$= r_{s_1s_2} + \bar{q}_1 \bar{s}_2. \quad (5.31)$$

Поскольку  $\bar{q}_1 \rightarrow 0$  при увеличении  $N$ ,

$$r_{12}(j) \rightarrow r_{s_1s_2}(j). \quad (5.32)$$

Очевидно,  $r_{s_1s_2}(j)$  имеет максимум при  $s_2(n) = s_1(n)$ , где  $r_{s_1s_2}$  — автокорреляционная функция сигнала  $s_1(n)$ . Таким образом, меняя форму шаблона  $s_2(n)$  с целью максимизации функции взаимной корреляции, можно получить  $s_2(n)$  как оценку  $s_1(n)$ .

Оценка сигнала методом подбора шаблона иногда удобна, например, когда форма сигнала приблизительно известна (например, для определенных биомедицинских потенциалов), но есть и более научный подход, который может быть предпочтительнее. В

этом методе вначале оценивается период сигнала через автокорреляционную функцию зашумленного сигнала, а затем находится взаимная корреляция зашумленного сигнала с периодической серией импульсов, период которой равен периоду сигнала. Получающаяся в результате функция взаимной корреляции считается оценкой сигнала.

Обозначим сигнал с периодом  $N_p$  точек ( $N_p < N$ ) через  $s(n)$ , а шум через  $q(n)$ , так что зашумленный сигнал равен  $S(n) = s(n) + q(n)$ . Пусть  $\delta(n - kN_p)$  — периодическая серия импульсов, используемая для нахождения взаимной корреляции, а  $N_\delta$  — число импульсов, используемых при нахождении взаимной корреляции. Последняя величина также равна числу периодов сигнала, за которые находится взаимная корреляция сигнала с серией импульсов. Тогда

$$r_{S\delta}(-j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [s(n) + q(n)] \delta(n - kN_p - j), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.33)$$

Для  $j = 0$  и учитывая, что  $\delta(n - kN_p) = 0$  для всех  $n \neq kN_p$ ,

$$r_{S\delta}(0) = \frac{1}{N_\delta} [s(0) + q(0) + s(N_p) + q(N_p) + s(2N_p) + q(2N_p) + \dots + s(N) + q(N)]. \quad (5.34)$$

Далее из-за периодичности сигнала  $s(n + kN_p) = s(n)$  уравнение (5.34) приводится к виду

$$r_{S\delta}(0) = \frac{1}{N_\delta} [Ns(0) + q(0) + q(N_p) + q(2N_p) + \dots + q(N)]$$

или

$$r_{S\delta}(0) = s(0) + \frac{1}{N_\delta} \sum_{k=0}^{N/N_p} q(kN_p). \quad (5.35)$$

При  $N \rightarrow \infty$ ,  $(1/N_\delta) \sum_{k=0}^{N/N_p} q(kN_p) \rightarrow 0$ , следовательно,  $r_{S\delta}(0) \rightarrow s(0)$ . Подобным образом, для других значений  $j$

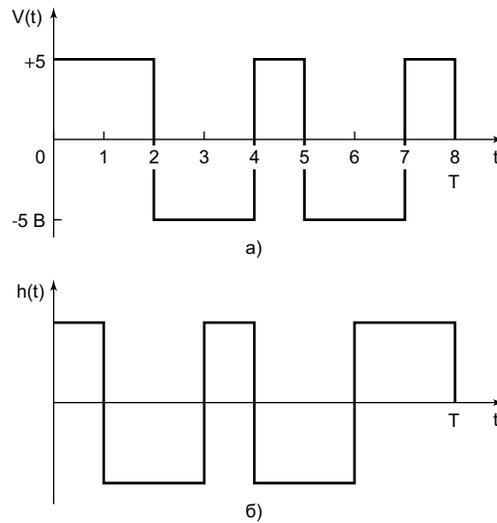
$$r_{S\delta}(-j) = \frac{1}{N_\delta} \sum_{n=0}^{N-1} [s(n) + q(n)] \delta[(n - j) - kN_p], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

в результате также подавляется шум и находятся значения  $s(n)$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Следовательно, из уравнения (5.33) получаем

$$r_{S\delta}(-j) = s(0), s(1), \dots, s(N - 1), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

что и является требуемым сигналом. Таким образом, сигнал, затерянный в зашумленном сигнале, можно оценить следующим образом:

- 1) найти автокорреляцию сигнала и определить его период;
- 2) найти взаимную корреляцию сигнала с периодической серией импульсов, период которой равен периоду сигнала; в ходе этой процедуры серия импульсов смещается вправо относительно сигнала.



**Рис. 5.12.** Сигнал — 8-битовое кодовое слово PCM (панель *a*). Импульсная характеристика соответствующего согласованного фильтра (панель *б*)

### 5.2.2.3. Реализация корреляционного детектирования — согласованный фильтр

Корреляция также применяется для реализации корреляционного детектирования с помощью согласованного фильтра. *Согласованным* называется фильтр, максимизирующий отношение сигнал-шум на выходе. Импульсная характеристика согласованного фильтра записывается следующим образом<sup>1</sup> [13]:

$$h(t)cs_i(T-t), \quad (5.36)$$

где  $c$  — произвольная константа,  $s_i(t)$  — входной сигнал (без шума), который выражается следующим образом:

$$s_i(t) = \begin{cases} s_i(t), & \text{для } 0 \leq t \leq T; \\ 0, & \text{для } T < t < 0. \end{cases}$$

Здесь  $T$  — момент времени, в который выполняется дискретизация выхода. Видно, что импульсная характеристика получена путем обращения сигнала во времени с последующим перемещением его на  $T(s)$  вдоль временной оси. В качестве примера на рис. 5.12, *a* показан сигнал, являющийся 8-битовым словом в кодировке PCM, а на рис. 5.12, *б* показана импульсная характеристика согласованного фильтра, максимизирующего детектирование сигнала.

<sup>1</sup>Формула (5.36) верна только для детерминированных сигналов, т.е. таких, о которых известно все, в том числе и момент времени  $T$ . Если сигнал имеет случайную компоненту (хотя бы фазовую, т.е. время его появления), то формула (5.36) принципиально неверна. В этом случае для построения согласованного фильтра следует воспользоваться теоремой Винера–Хинчина. — *Прим. ред.*

Теперь можно показать, что детектирование с помощью согласованного фильтра эквивалентно корреляции. Выход фильтра  $y(t)$  вначале выражается через свертку его входа  $s(t)$  с его импульсной характеристикой (свертка рассмотрена в разделе 5.3):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (5.37)$$

где

$$s(t) = s_1(t) + q(t). \quad (5.38)$$

Здесь  $\tau$  — задержка,  $q(t)$  обозначает шумовой компонент. Подставляя уравнение (5.38) в (5.37), получаем

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [s_1(\tau) + q(\tau)]h(t - \tau)d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [s_1(\tau)h(t - \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau)]h(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

Второй член правой части стремится к нулю, поскольку  $q(\tau)$  — случайный сигнал, который не коррелирует с  $h(t - \tau)$ . Следовательно,

$$y(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (5.39)$$

Далее из уравнения (5.36) получаем

$$h(t - \tau) = cs_1(T - t + \tau). \quad (5.40)$$

Объединяя уравнения (5.39) и (5.40), получаем

$$y(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)cs_1(T - t + \tau)d\tau. \quad (5.41)$$

Если этот выход дискретизуется в момент времени  $t = T$ , то

$$\begin{aligned} y(t) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)cs_1(\tau)d\tau \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t)dt = r_{11}(0), \end{aligned} \quad (5.42)$$

если  $c = 1$ .

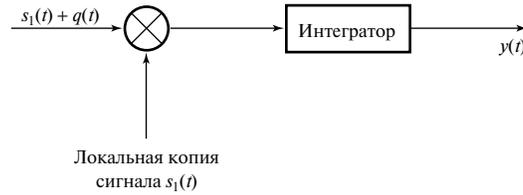


Рис. 5.13. Схематическое изображение корреляционного детектора

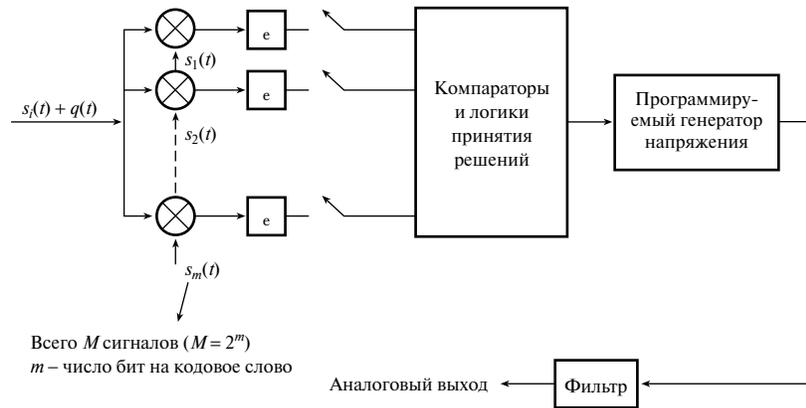


Рис. 5.14. Детектор кодовых слов PCM, основанный на корреляционном детекторе

Таким образом,  $y(T)$  — автокорреляционная функция сигнала  $s_1(t)$  с нулевой задержкой, которую можно получить, найдя взаимную корреляцию зашумленного входа с локально генерируемым бесшумным сигналом. На основе данного принципа и построен корреляционный детектор, схематическое изображение которого приведено на рис. 5.13. Например, на рис. 5.14 изображен детектор кодовых слов PCM, содержащий корреляционный детектор для каждого кодового слова.

В цифровом детекторе  $m$ -битовых кодовых слов хранятся кодовые слова, которые в процессе детектирования умножаются на  $m$  поступающих битов. Максимальное значение будет получено, если 1)  $m$  входных битов точно соответствуют  $m$ -битовому кодовому слову, или если 2)  $m$  входных битов случайно равны  $m$ -битовому кодовому слову. Второй вариант крайне нежелателен. Он возможен, если два соседних кодовых слова содержат последовательность битов, идентичную требуемому  $m$ -битовому кодовому слову, или если кодовое слово было повреждено. Следовательно, необходимо так упорядочить входной поток, чтобы была возможна синхронизация слов, а также битовая синхронизация в корреляционном приемнике.

Таким образом, нужна синхронизация кодовых слов, при которой выполняются следующие требования:

- 1) корреляция мала для моментов взятия выборок  $t \neq T$ ;
- 2) корреляция велика для выборок, взятых в моменты  $t = T$ .

Кодовое слово с такими свойствами дает большую автокорреляцию при нулевой задержке и малую — при других задержках. Следовательно, детектирование больших

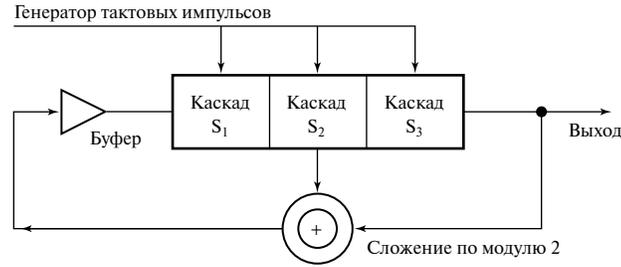


Рис. 5.15. Трехкаскадный генератор псевдослучайной последовательности



Рис. 5.16. Автокорреляционная функция биполярного сигнала трехкаскадного генератора псевдослучайной последовательности

значений функции взаимной корреляции в приемнике укажет расположение входных кодовых слов относительно записанного слова. Таким образом синхронизируется приемник. Далее отметим, что случайные сигналы имеют указанное выше автокорреляционное свойство, и их можно реализовать в цифровом приемнике с помощью псевдослучайной последовательности, которую легко генерировать, используя регистр сдвига с отводами. В качестве примера на рис. 5.15 показан трехкаскадный генератор псевдослучайной последовательности. Генератор производит последовательность 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, которая затем повторяется. Генерируемая автокорреляционная функция при биполярном сигнале на входе представлена на рис. 5.16.

Ниже указаны некоторые свойства псевдослучайных последовательностей.

1. Кодовые  $m$ -битовые слова порождают последовательность длины  $2^m - 1$ .
2. Максимальные значения равны  $2^m - 1$ .
3. Автокорреляционная функция равна  $-1$  везде, кроме максимумов.
4. Выходная последовательность содержит  $2^{m-1}$  единиц и  $2^{m-1} - 1$  нулей.
5. Спектральная плотность мощности равномерна, так что описанные генераторы можно использовать как источники белого шума.

Последнее свойство означает, что псевдослучайные последовательности также применяются в качестве источников белого шума.

## 5.2.2.4. Определение импульсной характеристики электрических систем

Дальнейшее приложение корреляции и псевдослучайных последовательностей лежит в определении импульсной характеристики электрических систем. Например, рассмотрим системы импульсного тестирования. При наличии шума малые импульсы могут маскироваться шумом, а большие — вызывать переполнение системы. Кроме того, используя единственный импульс, сложно поддерживать равномерную спектральную плотность энергии по полосе. При этом, как объяснялось выше, псевдослучайная последовательность имеет равномерный энергетический спектр. Кроме того, если время измерения кратно длине последовательности, дисперсия измеренных значений будет равна нулю, в результате время измерения будет малым, а точность высокой.

Основная идея метода — подать псевдослучайную последовательность на вход системы. Далее через взаимную корреляцию поданной последовательности и выхода находится импульсная характеристика системы. Доказательство сказанного приводится ниже.

Пусть  $q(t)$  — входная псевдослучайная последовательность, а  $y(t)$  — выход системы с импульсной характеристикой  $h(t)$ . Тогда

$$r_{qy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(t)y(t + \tau)dt = \quad (5.43)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} q(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} h(v)q(t - v + \tau)dv, \quad (5.44)$$

поскольку  $y(t)$  — свертка входа с импульсной характеристикой:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)q(t - v)dv. \quad (5.45)$$

Меняя в уравнении (5.44) порядок интегрирования, получаем

$$r_{qy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)dv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(t)q(t - v + \tau)dt = \quad (5.46)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(v)r_{qq}(\tau - v)dv. \quad (5.47)$$

Теперь  $r_{qq}(\tau - v)$  аппроксимируется  $\delta$ -функцией, поскольку это автокорреляционная функция псевдослучайной последовательности. Следовательно, уравнение (5.47) можно переписать в виде

$$r_{qy}(t) = K \int_{-\infty}^{\infty} h(v)\delta(\tau - v)dv = Kh(t), \quad (5.48)$$

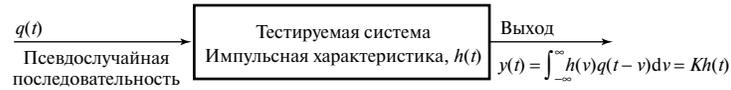


Рис. 5.17. Определение импульсной характеристики электрической системы

где  $K$  — площадь импульсной функции, равная среднеквадратическому значению шума [1]. Схема описываемой структуры изображена на рис. 5.17. Метод подвержен определенным ошибкам, и, чтобы их избежать, следует принимать определенные меры предосторожности.

### 5.2.2.5. Определение отношения сигнал-шум для периодического зашумленного сигнала

Измеряя коэффициент корреляции зашумленного периодического сигнала, можно определить его отношение сигнал-шум, а также мощность сигнала и шума [9]. Вывод соответствующих выражений приводится ниже. Для нахождения периода зашумленных сигналов можно использовать метод, описанный в подразделе 5.2.2.2.

Запишем сигнал как  $V_s(i)$ , шум — как  $V_n(i)$ , зашумленный сигнал  $V(i)$  выражается следующим образом:

$$V(i) = V_s(i) + V_n(i). \quad (5.49)$$

В таком случае периодический сигнал с периодом  $n$  интервалов дискретизации запишется как

$$V(i) = V(i + n). \quad (5.50)$$

Ковариация (второй момент)  $V(i)$  определяется следующим образом:

$$\text{cov}[V(i)] = \text{cov}[V(i), V(i + n)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{V(i) - \bar{V}(i)\} \{V(i + n) - \bar{V}(i + n)\}, \quad (5.51)$$

где

$$\bar{V}(i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(i) -$$

среднее  $V(i)$ . Таким образом, видно, что  $\text{cov}[V(i)]$  — автокорреляционная функция  $V(i)$  с нулевым средним с задержкой  $n$ . Далее обычным образом определяется коэффициент автокорреляции  $V(i)$ :

$$\begin{aligned} \rho[V(i)] &= \frac{\text{cov}[V(i)]}{\sqrt{\left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (V(i) - \bar{V}(i))^2 \right\} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (V(i + n) - \bar{V}(i + n))^2 \right\}}} = \\ &= \frac{\text{cov}[V(i)]}{\sigma[V(i)]\sigma[V(i + n)]}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где

$$\sigma[V(i)] = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (V(i) - \bar{V}(i))^2} \quad (5.53)$$

среднеквадратическое отклонение  $V(i)$ .

Отметим, что нормировка на коэффициент  $N$  в уравнениях (5.51)–(5.53) дает смещенные оценки. Несмещенные оценки получают путем замены  $N$  на  $N - 1$ . Отметим также, что такие члены, как

$$\sigma^2[V_x(i)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{V}_x(i))^2 = \text{var}[V_x(i)]$$

называются *дисперсией* и представляют мощность, соотнесенную с  $V_x(i)$ .

Учтем теперь в уравнении (5.51) тот факт, что корреляции между зашумленными сигналами стремятся к нулю при увеличении числа выборок. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{cov}[V(i), V(i+n)] &= \text{cov}[(V_s(i) + V_n(i)), (V_s(i+n) + V_n(i+n))] = \\ &= \text{cov}[V_s(i), V_s(i+n)] = \text{var}[V_s(i)]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Для достаточно длинных последовательностей данных  $\sigma[V_n(i)] = \sigma[V - n(i+n)]$ , поэтому

$$\begin{aligned} \sigma[V(i)]\sigma[V(i+n)] &= \sigma^2[V(i)] = \text{var}[V(i)] = \text{var}[V_s(i) + V_n(i)] = \\ &= \text{var}[V_s(i)] + \text{var}[V_n(i)] + 2\text{cov}[V_s(i), V_n(i)] = \text{var}[V_s(i)] + \text{var}[V_n(i)], \end{aligned} \quad (5.55)$$

поскольку  $\text{cov}[V_s(i), V_n(i)] = 0$ .

Чтобы получить выражение для коэффициента автокорреляции, подставим уравнения (5.54) и (5.55) в (5.52):

$$\rho[V(i)] = \frac{\text{var}[V_s(i)]}{\text{var}[V_s(i)] + \text{var}[V_n(i)]} = \frac{1}{1 + \frac{\text{var}[V_n(i)]}{\text{var}[V_s(i)]}}. \quad (5.56)$$

Отношение сигнал-шум  $S/N$  (дБ) определяется как  $10 \lg\{(\text{мощность сигнала})/(\text{мощность шума})\}$ , что в принятых обозначениях выглядит так:

$$\frac{S}{N}(\text{дБ}) = 10 \lg \left| \frac{\text{var}[V_s(i)]}{\text{var}[V_n(i)]} \right| \text{дБ}. \quad (5.57)$$

Объединяя уравнения (5.56) и (5.57), получаем

$$\frac{S}{N}(\text{дБ}) = 10 \lg \left| \frac{\rho[V(i)]}{1 - \rho[V(i)]} \right| \text{дБ}. \quad (5.58)$$

Таким образом, отношение сигнал-шум зашумленного периодического сигнала легко вычисляется по его коэффициенту автокорреляции.

Из уравнения (5.55) получаем

$$\text{var}[V_s(i)] + \text{var}[V_n(i)] \equiv S + N = \text{var}[V(i)], \quad (5.59)$$

где  $S$  и  $N$  представляют мощность сигнала и шума соответственно. Используя уравнения (5.56) и (5.59), можно получить выражения для  $S$  и  $N$ :

$$S = \rho[V(i)]\text{var}[V(i)] \quad (5.60)$$

и

$$N = (1 - \rho[V(i)])\text{var}[V(i)]. \quad (5.61)$$

Отметим, что уравнение (5.58) применяется для оценки производительности каналов магнитной записи с точки зрения их отношений сигнал-шум [9].

### 5.2.3. Быстрая корреляция

Расчет корреляции можно ускорить, используя теорему о корреляции, которая обычно формулируется следующим образом:

$$r_{12}(j) = F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)], \quad (5.62)$$

хотя корректной является такая формулировка:

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N}F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)], \quad (5.63)$$

где  $F_D^{-1}$  обозначает обратное дискретное преобразование Фурье. Данный подход требует выполнения двух дискретных преобразований Фурье (ДПФ) и одного обратного ДПФ, что легче всего сделать, используя алгоритм БПФ (см. главу 3). Если число членов в последовательностях достаточно велико, данный метод БПФ дает результат быстрее, чем непосредственный расчет взаимной корреляции.

*Доказательство теоремы о корреляции*

Пусть  $x_1(l)$ ,  $x_2(r)$  и  $x_3(n)$  — периодические последовательности длины  $N$ , и пусть их ДПФ-образы равны соответственно  $X_1(k)$ ,  $X_2(k)$  и  $X_3(k)$ . Более того, пусть

$$X_3(k) = X_1^*(k)X_2(k). \quad (5.64)$$

В этом случае

$$X_1^*(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)e^{(2\pi i/N)lk} \quad (5.65)$$

и

$$X_2^*(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r)e^{(2\pi i/N)(-rk)}. \quad (5.66)$$

Подставляя уравнения (5.65) и (5.66) в (5.64), получаем

$$X_3(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)e^{(2\pi i/N)lk} \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r)e^{(2\pi i/N)(-rk)} = \quad (5.67)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} x_1(l)x_2(r)e^{(2\pi i/N)(lk-rk)}. \quad (5.68)$$

Далее

$$x_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)e^{(2\pi i/N)nk}. \quad (5.69)$$

Таким образом, подставляя уравнение (5.68) в (5.69), получаем

$$\begin{aligned} x_3(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} x_1(l)x_2(r)e^{(2\pi i/N)(lk-rk+nk)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l) \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r) \left[ \sum_{k=0}^{N-1} e^{(2\pi i/N)(l-r+n)l} \right]. \end{aligned} \quad (5.70)$$

При  $r = n + l$  выражение в квадратных скобках равно  $N$ . При  $r \neq n + l$  его можно рассматривать как геометрическую прогрессию вида

$$\sum ax^n,$$

сумма которой по  $N$  членам равна

$$\frac{a(1-x^N)}{1-x}.$$

В нашем случае сумма равна:

$$\frac{1[1 - e^{(2\pi i/N)(l-r+n)N}]}{1 - e^{(2\pi i/N)(l-r+n)}}. \quad (5.71)$$

Показатель экспоненты в числителе всегда кратен  $2\pi$ , так что ее значение равно 1. Таким образом, сумма равна нулю при  $r \neq n + l$ . Следовательно, уравнение (5.70) можно переписать как

$$x_3(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l) \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r)N\delta(l-r+n), \quad (5.72)$$

где  $\delta(l-r+n) = 1$  при  $r = n + l$  и  $\delta(l-r+n) = 0$  при  $r \neq n + l$ . Положив  $r = n + l$  и упростив, получаем:

$$x_3(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)x_2(l+n) \quad (5.73)$$

или

$$\frac{1}{N}x_3(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)x_2(l+n). \quad (5.74)$$

Правая часть данного выражения эквивалентна взаимной корреляции  $x(n)$  и  $x_2(n)$ , и, как легко видеть, она равна  $(1/N)x_3(n)$ . Из уравнения (5.69) получаем

$$x_3(n) = F_D^{-1}[X_3(k)]. \quad (5.75)$$

Далее, объединяя уравнения (5.74), (5.75) и (5.63), получаем

$$\frac{1}{N}F_D^{-1}[X_3(k)] = r_{12}(n) = \frac{1}{N}F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)]. \quad (5.76)$$

Наконец, заменяя  $n$  на  $j$ , получаем

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N}F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)]. \quad (5.77)$$

### Пример 5.6

Используя теорему о корреляции, найдем взаимную корреляцию двух последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ .

$$x_1(n) = \{1; 0; 0; 1\},$$

$$x_2(n) = \{0, 5; 1; 1; 0, 5\}.$$

Используем вначале теорему о корреляции (уравнение (5.77)). В разделе 3.5 было показано, что  $X_1(k)$  равно

$$X_1(k) = 2; 1 + i; 0; 1 - i,$$

так что

$$X_1^*(k) = 2; 1 - i; 0; 1 + i.$$

Для получения  $X_2(k)$  проще всего использовать алгоритм БПФ, приведенный в разделе 3.5. Таким образом, при  $x_0 = 0, 5$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_1 = 1$  и  $x_3 = 0, 5$  получаем

$$X_{21}(0) = x_0 + x_2 = 1, 5,$$

$$X_{21}(1) = x_0 - x_2 = -0, 5,$$

$$X_{22}(0) = x_1 + x_3 = 1, 5,$$

$$X_{22}(1) = x_1 - x_3 = 0, 5,$$

$$X_{11}(0) = X_{21}(0) + X_{22}(0) = 3,$$

$$X_{11}(1) = X_{21}(1) + (-i)X_{22}(1) = -0, 5 - 0, 5i,$$

$$X_{11}(2) = X_{21}(0) - X_{22}(0) = 0,$$

$$X_{11}(3) = X_{21}(1) - (-i)X_{22}(1) = -0, 5 + 0, 5i.$$

Собирая значения БПФ, получаем

$$X_1^*(k) = 2; 1 - i; 0; 1 + i,$$

$$X_2(k) = 3; -0, 5 - 0, 5i; 0; -0, 5 + 0, 5i.$$

Так что

$$\begin{aligned} X_1^*(0)X_2(0) &= 2 \times 3 = 6, \\ X_1^*(1)X_2(1) &= (1 - i)(-0,5 - 0,5i) = -1, \\ X_1^*(2)X_2(2) &= 0 \times 0 = 0, \\ X_1^*(3)X_2(3) &= 0,5(1 + i)(-1 + i) = -1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[X_1^*(k)X_2(k)] = 6; -1; 0; -1.$$

Теперь необходимо к этому результату применить обратное ДПФ. Как объясняется в разделе 3.6, обратное ДПФ получается путем замены знаков экспонент (в весовых коэффициентах  $W_N$ ) приведенного выше алгоритма БПФ и деления результата на  $N$ . Следовательно, получаем такой результат:

$$\begin{aligned} X_{21}(0) &= x_0 + x_2 = 6, \\ X_{21}(1) &= x_0 - x_2 = 6, \\ X_{22}(0) &= x_1 + x_3 = -2, \\ X_{22}(1) &= x_1 - x_3 = 0, \\ X_{11}(0) &= X_{21}(0) + X_{22}(0) = 4, \\ X_{11}(1) &= X_{21}(1) + iX_{22}(1) = 6, \\ X_{11}(2) &= X_{21}(0) - X_{22}(0) = 8, \\ X_{11}(3) &= X_{21}(1) - iX_{22}(1) = 6. \end{aligned}$$

Компоненты  $F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)]$  получаются делением значений  $X_{11}(0)$ ,  $X_{11}(1)$ ,  $X_{11}(2)$  и  $X_{11}(3)$  на  $N = 4$ . Таким образом,

$$F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)] = 1; 1,5; 2; 1,5.$$

Далее из уравнения (5.77) определяем

$$r_{12}(i) = \frac{1}{4}F_D^{-1}[X_1^*X_2(k)] = \{0,25; 0,375; 0,5; 0,375\}. \quad (5.78)$$

Эта корреляция будет круговой, поскольку все данные периодичны с периодом  $N$ . Если непосредственно посчитать взаимную корреляцию  $r_{12}(i)$ , то получатся такие значения:

$$\begin{aligned} r_{12}(0) &= (1 \times 0,5 + 0 + 0 + 1 \times 0,5)/4 = 0,25, \\ r_{12}(1) &= (1 \times 1 + 0 + 0 + 1 \times 0,5)/4 = 0,375, \\ r_{12}(2) &= (1 \times 1 + 0 + 0 + 1 \times 1)/4 = 0,5, \\ r_{12}(3) &= (1 \times 0,5 + 0 + 0 + 1 \times 1)/4 = 0,375. \end{aligned}$$

Следующее значение  $r_{12}(4)$  снова равно 0,25, и последовательность периодически повторяется. Данный результат согласуется с данными, полученными выше с помощью теоремы о корреляции. Как объясняется в разделе 5.2.1, теорему о корреляции можно использовать для получения линейной корреляции путем добавления к двум последовательностям дополняющих нулей. Следовательно, если последовательность  $x_1(n)$  имеет длину  $N_1$ , а последовательность  $x_2(n) - N_2$ , то  $x_1(n)$  дополняется  $(N_2 - 1)$  нулями, а  $x_2(n) - (N_1 - 1)$  нулями. Далее на основе двух расширенных последовательностей рассчитывается взаимная корреляция. Этот метод вычисления взаимной корреляции с помощью теоремы о корреляции и БПФ называется *быстрой корреляцией*.

Расчет взаимной корреляции также можно ускорить, реализовав его рекурсивно. Проиллюстрируем это на примере с нулевой задержкой. Взаимная корреляция при нулевой задержке двух дискретных сигналов  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  равна

$$r_{12}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n). \quad (5.79)$$

Эта операция включает вычисление  $N$  произведений,  $N - 1$  суммы и одного деления и может требовать чрезмерного времени при реализации в реальном времени, когда пары новых данных поступают с частотой дискретизации. Расчет необходимо повторять при поступлении следующей пары данных. Новые вычисления будут отличаться от предыдущих только тем, что к сумме пар произведений будет прибавлено произведение новой пары и первое произведение вычтется. Итак, для каждой взаимной корреляции

$$\begin{aligned} (\text{новое значение}) = & (\text{предыдущее значение}) + \\ & + \frac{1}{N} (\text{произведение двух новых данных}) - \\ & - \frac{1}{N} (\text{произведение первых двух данных}). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Это выражение — основа рекурсивного алгоритма. Каждая взаимная корреляция теперь требует только одного умножения, одного вычитания, одного сложения и одного деления при условии, что в памяти хранятся произведения пар данных. Для  $N$ -точечной корреляции рекурсивный подход дает правильные значения после вычисления первых  $(N - 1)$  точек.

Во многих приложениях требуется, чтобы среднее данных было равно нулю, например, для устранения постоянного тока из электрических сигналов. При этом необходимо рассчитать среднее значение сигнала и вычесть его из всех дискретных значений. Это означает, что расчет среднего значения также можно провести рекурсивно, поскольку для каждой новой пары данных

$$\begin{aligned} \text{новое среднее} = & \text{предыдущее среднее} + \\ & + \frac{1}{N} (\text{новый элемент данных} - \text{первый элемент данных}). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Кроме того, вычитание среднего уровня и расчет взаимной корреляции можно объединить в один рекурсивный алгоритм. Рассмотрим величины

$$\bar{x}_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \quad (5.82)$$

и

$$\bar{x}_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n). \quad (5.83)$$

Значение функции взаимной корреляции  $k$ -го набора из  $N$  точек равно

$$r_{12}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n). \quad (5.84)$$

При удалении среднего значение функции взаимной корреляции становится равным  $r_{12}^0(k)$ , где

$$r_{12}^0(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x_1(n) - \bar{x}_1(k)][x_2(n) - \bar{x}_2(k)], \quad (5.85)$$

что можно упростить до

$$r_{12}^0(k) = r_{12}(k) - \bar{x}_1(k)\bar{x}_2(k). \quad (5.86)$$

Объединяя уравнения (5.80) и (5.83), получаем

$$r_{12}(k) = r_{12}(k-1) + \frac{1}{N} [x_1(k)x_2(k) - x_1(k-N)x_2(k-N)]. \quad (5.87)$$

Из уравнения (5.81)

$$\bar{x}_1(k) = \bar{x}_1(k-1) + \frac{1}{N} [x_1(k) - x_1(k-N)] \quad (5.88)$$

и

$$\bar{x}_2(k) = \bar{x}_2(k-1) + \frac{1}{N} [x_2(k) - x_2(k-N)]. \quad (5.89)$$

Уравнения (5.86)–(5.89) составляют рекурсивный алгоритм, который объединяет вычитание среднего из данных с вычислением взаимной корреляции. Каждое вычисление требует только трех умножений, четырех вычитаний, трех сложений и четырех делений. Специалисты-практики отмечают, что при изменении средних значений данных следует аккуратно выбирать  $N$ , в противном случае можно получить неточные результаты.

### 5.3. Описание свертки

*Свертка*, помимо прочего, описывает, как выход системы определяется взаимодействием входа с самой системой. Обычно выход системы является запаздывающей и подавленной или усиленной версией входа. В этой связи особенно полезно рассмотреть

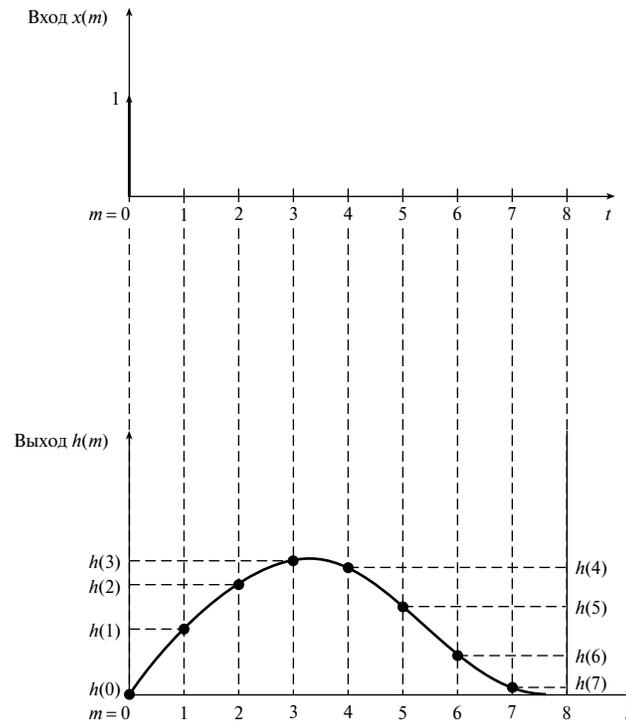


Рис. 5.18. Входной импульс и соответствующая импульсная характеристика системы

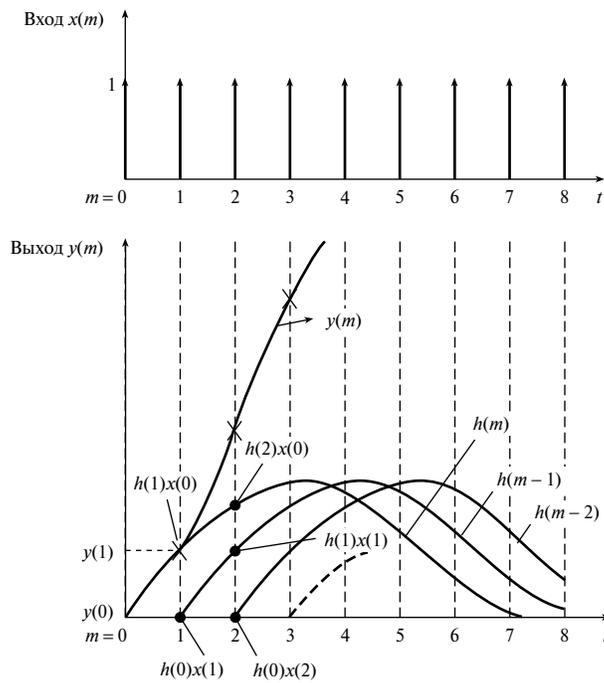
выход системы, порожденный импульсным входом. Это объясняется тем, что любой вход можно представить как последовательность импульсов разной мощности. Итак, выход системы, инициированный импульсным входом, не будет соответствующим импульсом, а будет меняться со временем, в некоторый момент достигая максимального значения, как показано на рис. 5.18. Из данного рисунка видно, что в момент взятия выборки  $m$  выход, порожденный единичным импульсом, поданным в момент 0, равен  $h(m)$ . Данная величина называется *импульсной характеристикой* системы или ее *импульсным откликом*.

Рассмотрим подачу на вход системы последовательности импульсов  $x(m)$  в моменты времени  $m$ . В контексте рис. 5.19 выход в момент времени 0 равен  $y(0)$ , причем

$$y(0) = h(0)x(0).$$

В дискретный момент времени  $m = 1$  выход равен  $h(0)x(1)$  (влияние текущего входа  $x(1)$ ) плюс  $h(1)x(0)$  (запаздывающее влияние входа, поданного в момент  $m = 0$ ). Следовательно,

$$y(1) = h(1)x(0) + h(0)x(1).$$



**Рис. 5.19.** Поданная на вход импульсная последовательность и характеристика системы, полученная из отдельных импульсных откликов

Таким образом, последующие выходы запишутся так:

$$\begin{aligned}
 y(2) &= h(2)x(0) + h(1)x(1) + h(0)x(2) \\
 y(3) &= h(3)x(0) + h(2)x(1) + h(1)x(2) + h(0)x(3) \\
 &\vdots \\
 y(n) &= h(n)x(0) + h(n-1)x(1) + \dots + h(0)x(n).
 \end{aligned}
 \tag{5.90}$$

Если система линейна, выход можно записать как линейную сумму влияния предыдущих входов. Выход линейной системы первого порядка описывается уравнением (5.90).

Изучая приведенные выражения, находим, что выход получается умножением входной последовательности на соответствующие точки обращенной во времени функции импульсной характеристики. Альтернативный вариант — записать уравнение (5.90) в таком виде:

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(n)x(0)
 \tag{5.91}$$

и рассматривать выход как произведение соответствующих пар точек в функции импульсной характеристики и обращенной во времени входной последовательности. Следовательно, сверточная сумма эквивалентна взаимной корреляции одной последовательности и обращенной во времени другой.

Уравнения (5.90) и (5.91) можно записать компактно:

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(n-m)x(m) \quad (5.92)$$

и

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m). \quad (5.93)$$

Данные функции называются *сверточными суммами* входов с импульсной характеристикой, а выход находится как *свертка* входа с импульсной характеристикой системы.

Уравнения (5.92) и (5.93) можно расширить на сигналы бесконечной длительности, записав их следующим образом:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) \circledast h(n) \quad (5.94)$$

и

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) \circledast x(n). \quad (5.95)$$

В приведенных уравнениях символ “ $\circledast$ ” обозначает операцию свертки.

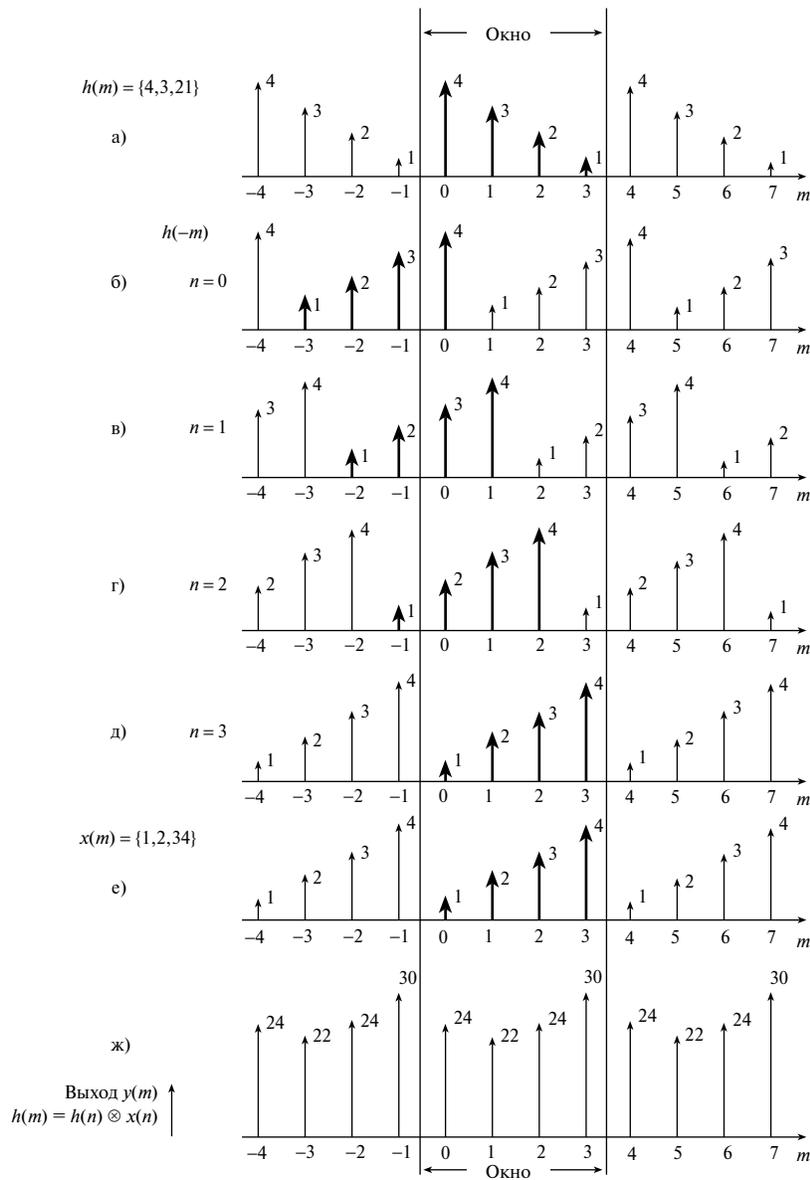
Если вход состоит из непрерывной последовательности импульсов, приведенную выше сумму можно заменить интегралом, например, уравнение (5.94) при этом приводится к виду

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda, \quad (5.96)$$

что называется *интегралом свертки*.

До этого момента термином *свертка* назывался результат свертки импульсной характеристики системы со входом системы. В то же время, данную концепцию можно расширить на свертку любых двух наборов данных и рассматривать термин в более широком смысле.

В качестве примера свернем две периодические во времени последовательности  $\{4, 3, 2, 1\}$  ( $h(m)$ ) и  $\{1, 2, 3, 4\}$  ( $x(m)$ ). На рис. 5.20, а показана периодическая последовательность  $\{4, 3, 2, 1\}$  ( $h(m)$ ), а на рис. 5.20, б — обращенная во времени последовательность ( $h(-m)$ ),  $\{1, 2, 3, 4\}$ . (Напомним, что сверточная сумма требует, чтобы одна из последовательностей умножалась на обращенную во времени вторую последовательность, т.е. свертка соответствует взаимной корреляции одной последовательности с обращенной во времени второй.) На рисунке также показано окно, ширина которого равна одному периоду. по которому выполняется свертка. Очевидно, что полученный результат будет периодическим, как и при нахождении взаимной корреляции (раздел 5.2.1), так что необходимо найти только свертку по выделенному интервалу. На рис. 5.20, в для справки показана вторая последовательность  $\{1, 2, 3, 4\}$  ( $x(m)$ ).



**Рис. 5.20.** Свертка  $y(m)$  последовательностей  $h(n)$  и  $x(n)$ : а) периодическая последовательность  $h(m)$ ; б) обращенная во времени последовательность  $h(-m)$ ; в)–д) копии  $h(-m)$ , последовательно смещаемые вправо; е) последовательность  $x(m)$ ; ж) выходная последовательность  $y(m) = h(n) \otimes x(n)$

При  $n = 0$  уравнение (5.92) переходит в следующее:

$$y(0) = \sum_{m=0}^n h(-m)x(m).$$

Согласно этой формуле взаимная корреляция данных в окне на рис. 5.20, б и е равна

$$y(0) = 4 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 24.$$

При  $n = 1$  уравнение (5.92) переходит в следующее:

$$y(1) = \sum_{m=0}^n h(1-m)x(m),$$

и согласно этой формуле взаимная корреляция данных в окне на рис. 5.20, в и е равна

$$y(1) = 3 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 4 = 22.$$

Следовательно,

$$y(2) = 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 1 \times 4 = 24$$

и

$$y(3) = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 30.$$

Далее выходная последовательность (см. рис. 5.20, ж) циклично повторяется.

Если сигналы поддаются строгому математическому описанию, свертку можно выполнить аналитически. Чтобы лучше понять процесс свертки, рассмотрим подобный пример и проиллюстрируем необходимые этапы графически.

### Пример 5.7

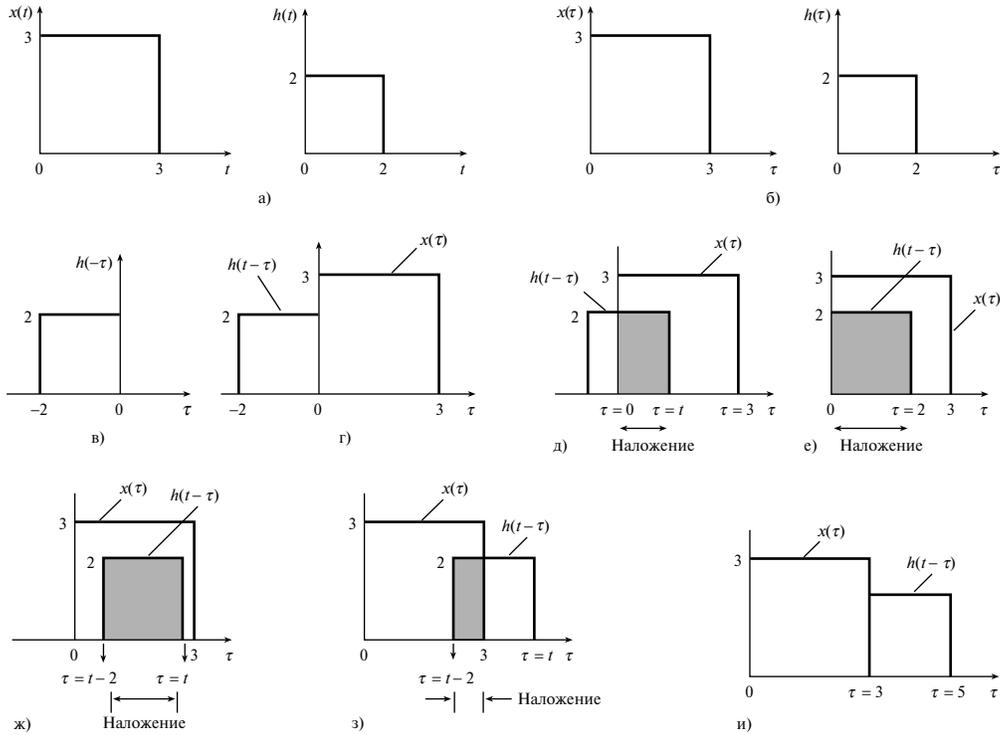
Найдем аналитически свертку сигналов  $x(t)$  и  $h(t)$ , изображенных на рис. 5.21, а.

Пусть интеграл свертки записывается как

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (5.97)$$

Уравнение (5.97) соответствует уравнению (5.96), в котором переменную  $\lambda$  заменили на  $\tau$ , чтобы указать, что теперь рассматривается задача с задержками. Интеграл свертки зависит от переменной  $\tau$ , так что рис. 5.21, а нужно заменить на рис. 5.21, б.

Далее необходимо обратить во времени сигнал  $h(\tau)$ , как показано на рис. 5.21, в. Далее  $h(-\tau)$  смещается относительно  $x(\tau)$  в положительном направлении  $\tau$ . Получающийся в результате сигнал  $h(t-\tau)$  накладывается на  $x(\tau)$  за пять отдельных этапов, проиллюстрированных на рис. 5.21, г-з. Для каждого из этих этапов существует соответствующий интеграл свертки. Следовательно,  $x(t) \otimes h(t)$  существует в пяти отдельных непрерывных областях.



**Рис. 5.21.** Аналитическая свертка: а) сигналы  $x(t)$  и  $h(t)$ ; б)  $x(\tau)$  и  $h(\tau)$ ; в)  $h(-\tau)$ ; г)  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$ ;  $t < 0$ , сигнал  $h(t-\tau)$  не накладывается на  $x(\tau)$ ; д)  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$ ;  $0 < t \leq 2$ , первое частичное наложение  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$ ; е)  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$ ;  $t = 2$ , конец первого частичного наложения; ж)  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$ ;  $2 \leq t \leq 3$ , полное наложение  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$ ; з)  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$ ;  $3 \leq t \leq 5$ , второе частичное наложение  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$ ; и)  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$ ;  $t > 5$ , наложения  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$  нет

- *Этап 1.*  $t < 0$  и  $h(t-\tau)$  не накладывается на  $x(\tau)$  (рис. 5.21, з). Поскольку функции не перекрываются,  $x(\tau)h(t-\tau) = 0$  для всех  $t$  и не дает вклада в интеграл свертки.
- *Этап 2.*  $0 < t \leq 2$  и существует частичное наложение  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$  (рис. 5.21, д). В этой области

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=0}^{\tau=t} (3) \times (2)d\tau \quad (5.98)$$

$$y(t) = 6[\tau]_0^t = 6t, \quad 0 < t \leq 2$$

Как показано на рис. 5.21, е, данный этап завершается в момент  $t = 2$ .

- *Этап 3.*  $2 \leq t \leq 3$  и сигналы  $h(t-\tau)$  и  $x(\tau)$  полностью перекрываются (рис. 5.21, ж). В этой области

$$y(t) = \int_{\tau=t-2}^{\tau} (3) \times (2)d\tau = 6[\tau]_{t-2}^t \quad (5.99)$$

$$y(t) = 6(t - t + 2) = 12, \quad 2 \leq t \leq 3.$$

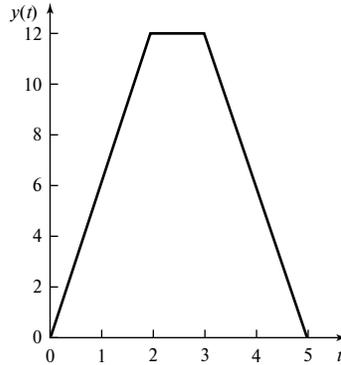


Рис. 5.22. Зависимость свертки  $y(t) = x(t) \otimes h(t)$  от  $t$

- *Этап 4.*  $3 \leq t \leq 5$ . Еще одна область частичного наложения, показанная на рис. 5.21, з:

$$y(t) = \int_{\tau=t-2}^{\tau=3} (3) \times (2) d\tau = 6[\tau]_{t-2}^3 = 6(5-t)3 - 6t. \quad (5.100)$$

- *Этап 5.*  $t > 5$ . Как показано на рис. 5.21, u, это вторая область без наложения, которая также не дает вклада в интеграл свертки.

Таким образом, вклад в интеграл свертки дают этапы 2–4, причем эти вклады выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 < t \leq 2 & \quad y(t) = 6t, \\ 2 \leq t \leq 3 & \quad y(t) = 12, \\ 3 \leq t \leq 5 & \quad y(t) = 30 - 6t. \end{aligned}$$

Из этих выражений можно получить зависимость  $y(t)$ , изображенную на рис. 5.22.

---

Приведем повторно уравнения (5.94) и (5.96) и продолжим наше обсуждение.

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) \otimes h(n)$$

и

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda.$$

Изучая эти уравнения, следует помнить, что свертка выполняется во времени — возникает так называемая *свертка во временной области*. Известно, что в частотной области выход системы на частоте  $f$  равен  $Y(f)$ :

$$Y(f) = H(f)X(f), \quad (5.101)$$

где  $H(f)$  — частотная характеристика системы на частоте  $f$ ,  $X(f)$  — Фурье-образ входа  $x(t)$ . Кроме того, можно показать, что  $H(f)$  — Фурье-образ  $h(t)$ . Применяя обратное преобразование Фурье к обеим частям уравнения (5.101), получаем

$$F^{-1}[Y(f)] = y(t) = F^{-1}[H(f)X(f)]. \quad (5.102)$$

Объединяя уравнения (5.96) и (5.102), получаем, что

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda = x(t) \otimes h(t) = F^{-1}[H(f)X(f)]. \quad (5.103)$$

Таким образом, видно, что свертка двух сигналов во временной области эквивалентна применению обратного преобразования Фурье к произведению Фурье-образов двух сигналов. Данный полезный факт часто формулируют в сокращенной форме: *свертка во временной области эквивалентна умножению в частотной*.

Существует соотношение, дуальное приведенному, т.е. свертка в частотной области эквивалентна умножению во временной. Таким образом, можно показать [10], что

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - u)H(u)du = X(f) \otimes H(f) = \\ &= F[y(t)] = F[x(t)h(t)]. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Следовательно, Фурье-образ произведения двух временных последовательностей соответствует свертке Фурье-образов двух последовательностей. Данный результат обычно используется, чтобы объяснить взвешивание данных перед спектральным анализом (см. главу 11). В данной процедуре оцифрованная последовательность данных точка за точкой умножается на другую последовательность, которая состоит из дискретных значений весовой функции. Этот процесс называется *взвешиванием* и выполняется для уменьшения ошибок при вычислении энергетического спектра данных. После этого к взвешенным данным применяется дискретное преобразование Фурье, по результату которого вычисляется энергетический спектр. Задачей является получение энергетического спектра последовательности данных, но из сказанного выше следует, что в действительности получается спектр последовательности данных, свернутый со спектром весовой последовательности.

### 5.3.1. Свойства свертки

#### 1. Закон коммутативности

$$x_1(t) \otimes x_2(t) = x_2(t) \otimes x_1(t). \quad (5.105)$$

Отметим, что данное выражение идентично следующему:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)x_1(t - \tau)d\tau.$$

## 2. Закон дистрибутивности

$$x_1(t) \circledast [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) \circledast x_2(t) + x_1(t) \circledast x_3(t). \quad (5.106)$$

## 3. Закон ассоциативности

$$x_1(t) \circledast [x_2(t) \circledast x_3(t)] = [x_1(t) \circledast x_2(t)] \circledast x_3(t) \quad (5.107)$$

Данные свойства можно доказать, либо расписав соответствующие интегралы, либо рассмотрев свертку как взаимную корреляцию одной последовательности с обращенной во времени другой.

## 5.3.2. Круговая свертка

Из сказанного в разделе 5.2.1 следует, что результат корреляции двух периодических последовательностей неравной длины — это циклическая последовательность, период которой равен периоду меньшей последовательности, что, таким образом, является неверным результатом. Поскольку свертка эквивалента взаимной корреляции одной последовательности с обращенной во времени второй, сказанное справедливо и для свертки. Следовательно, как и в случае с корреляцией, при свертке необходимо, чтобы две последовательности были равной длины. Итак, если длины последовательностей равны  $N_1$  и  $N_2$ , то к первой из них следует добавить  $N_2 - 1$  нулей, а ко второй —  $N_1 - 1$  нулей. После этого обе последовательности получают равную длину  $N_1 + N_2 - 1$ , и будет вычислено правильное значение линейной свертки при выполнении других необходимых условий, указанных в разделе, посвященном корреляции.

## 5.3.3. Идентификация систем

В уравнении (5.95) представлена связь между входом системы  $x(n)$  и ее выходом  $y(n)$ . Термином *идентификация системы* обозначают определение характеристики  $h(n)$ , если она неизвестна. Если на вход системы подать пробный сигнал  $x(n)$  и измерить выход  $y(n)$ , характеристику  $h(n)$  можно определить следующим образом (также можно использовать метод, описанный в разделе 5.2.2.4).

Из уравнения (5.91) следует, что  $y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(n)x(0)$ . При  $n = 0$   $y(0) = h(0)x(0)$ , поэтому

$$h(0) = \frac{y(0)}{x(0)}. \quad (5.108)$$

Далее, расписывая и переупорядочивая уравнение (5.93), получаем:

$$y(n) = h(n)x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m), \quad n \geq 1, \quad (5.109)$$

поэтому

$$h(n) = \frac{y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m)}{x(0)}, \quad n \geq 1, x(0) \neq 0. \quad (5.110)$$

Используя уравнения (5.108) и (5.110), можно вычислить  $h(n)$ .

### Пример 5.8

Пробный сигнал  $x(n) = \{1; 1; 1\}$  подается на вход системы с неизвестной импульсной характеристикой  $h(n)$ . На входе системы наблюдается последовательность  $y(n) = \{1; 4; 8; 10; 8; 4; 1\}$ . Определите  $h(n)$ .

Из уравнения (5.108)

$$h(0) = \frac{y(0)}{x(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Используя уравнение (5.110), находим

$$h(n) = \frac{y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m)}{x(0)}.$$

Для  $h(1)$  получаем следующее выражение:

$$h(1) = \frac{y(1) - \sum_{m=0}^0 h(m)x(1-m)}{x(0)} = \frac{y(1) - h(0)x(1)}{x(0)} = \frac{4 - 1 \times 1}{1} = 3.$$

Для  $h(2)$  результаты таковы:

$$\begin{aligned} h(2) &= \frac{y(2) - \sum_{m=0}^1 h(m)x(2-m)}{x(0)} = \frac{y(2) - h(0)x(2) - h(1)x(1)}{x(0)} = \\ &= \frac{8 - 1 \times 1 - 3 \times 1}{1} = 4. \end{aligned}$$

Для  $h(3)$  получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} h(3) &= \frac{y(3) - \sum_{m=0}^2 h(m)x(3-m)}{x(0)} = \frac{y(3) - h(0)x(3) - h(1)x(2) - h(2)x(1)}{x(0)} = \\ &= \frac{10 - 1 \times 0 - 3 \times 1 - 4 \times 1}{1} = 3. \end{aligned}$$

Для  $h(4)$  вычисляем:

$$\begin{aligned} h(4) &= \frac{y(4) - \sum_{m=0}^3 h(m)x(4-m)}{x(0)} = \\ &= \frac{y(4) - h(0)x(4) - h(1)x(3) - h(2)x(2) - h(3)x(1)}{x(0)} = \\ &= \frac{8 - 1 \times 0 - 3 \times 0 - 4 \times 1 - 3 \times 1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Для  $h(5)$  получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} h(4) &= \frac{y(4) - \sum_{m=0}^3 h(m)x(4-m)}{x(0)} = \\ &= \frac{y(4) - h(0)x(4) - h(1)x(3) - h(2)x(2) - h(3)x(1)}{x(0)} = \\ &= \frac{8 - 1 \times 0 - 3 \times 0 - 4 \times 1 - 3 \times 1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Фактически  $h(n) = 0$  для  $n \geq 5$ . Следовательно,  $h(n) = \{1; 3; 4; 3; 1\}$ .

---

### 5.3.4. Обращение свертки

Если импульсная характеристика и выход системы известны, то для поиска неизвестного входа применяется *обращение свертки*. Обратить свертку можно с помощью процедуры, подобной описанной в разделе 5.3.3 для идентификации системы. Расписывая и переупорядочивая уравнение (5.93), получаем

$$y(n) = h(0)x(n) + \sum_{m=1}^n h(m)x(n-m). \quad (5.111)$$

При  $n = 0$   $y(0) = h(0)x(0)$ .

Следовательно,

$$x(0) = \frac{y(0)}{h(0)}. \quad (5.112)$$

Из уравнения (5.111) получаем

$$x(n) = \frac{y(n) - \sum_{m=1}^n h(m)x(n-m)}{h(0)}. \quad (5.113)$$

Уравнения (5.112) и (5.113) подобны уравнениям (5.108) и (5.110), так что процедура расчета  $x(n)$  аналогична процедуре расчета  $h(n)$ .

**Пример 5.9**

Для системы, использованной в примере 5.8, вычислите вход  $x(n)$  по данным  $h(n) = \{1; 3; 4; 3; 1\}$  и  $y(n) = \{1; 4; 8; 10; 8; 4; 1\}$ .

Из уравнения (5.112) вычисляем:

$$x(0) = \frac{y(0)}{h(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Из уравнения (5.113) получаем:

$$x(1) = \frac{y(1) - h(1)x(0)}{h(0)} = \frac{4 - 3 \times 1}{1} = 1$$

$$x(2) = \frac{y(2) - h(1)x(1) - h(2)x(0)}{h(0)} = \frac{8 - 3 \times 1 - 4 \times 1}{1} = 1$$

$$x(3) = \frac{y(3) - h(1)x(2) - h(2)x(1)}{h(0)} = \frac{10 - 3 \times 1 - 4 \times 1 - 3 \times 1}{1} = 0.$$

Для  $n \geq 3$   $x(n) = 0$ .

Следовательно,  $x(n) = \{1; 1; 1\}$ , что согласуется со значениями, использованными в примере 5.8.

**5.3.5. Слепое обращение свертки**

Процесс определения входного сигнала по выходному при неизвестной импульсной характеристике системы называется *слепым обращением свертки*. Описанный ниже метод его выполнения основан на разработке Белла и Сежновски [2]. Задача и ее решение иллюстрируется на рис. 5.23. На рис. 5.23, а требуемый неизвестный исходный сигнал  $x(n)$  передается через систему с импульсной характеристикой  $h(n)$ , в результате чего получается измеренный выходной сигнал  $f(n)$ . Сигнал  $f(n)$  представляет собой результат свертки  $h(n)$  с  $x(n)$  ( $h(n) \otimes x(n)$ ), следовательно, искажается запаздывающей копией  $x(n)$ . В задаче требуется вычислить сигнал  $u(n)$ , являющийся хорошей аппроксимацией  $x(n)$ . Следовательно, как показано на рис. 5.23, б, требуется причинный фильтр  $w(n)$ , которой при свертке входного сигнала с  $f(n)$  даст необходимый выход  $u(n)$ . В качестве такого фильтра можно использовать трансверсальный фильтр, изображенный на рис. 5.24 (сравните с рис. 1.4, а). Выход этого фильтра равен

$$u(n) = \sum_{m=0}^{L-1} w(m)f(n-m),$$

что можно записать в альтернативной матричной форме

$$\mathbf{U} = \mathbf{WF}, \quad (5.114)$$

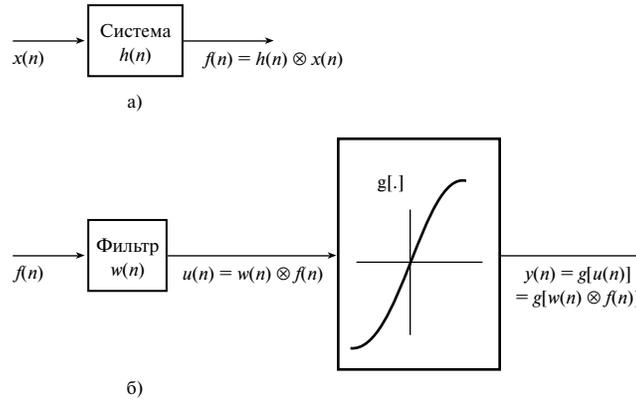
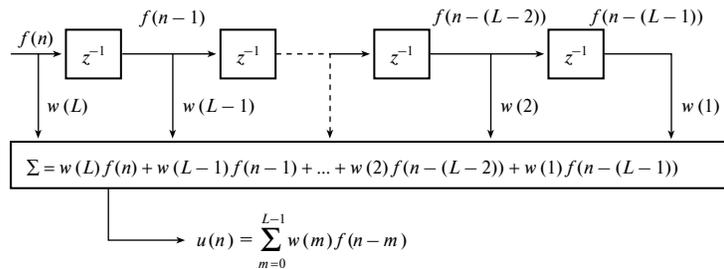


Рис. 5.23. Слепое обращение свертки

Рис. 5.24. Трансверсальный фильтр  $w(n)$  для слепой свертки

где  $\mathbf{U} = \{u(0), u(1), \dots, u(N)\}^T$ ,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w(L) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ w(L-1) & w(L) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ w(1) & w(2) & \dots & w(L) & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & w(1) & \dots & w(L) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{F} = \{f(0), f(1), \dots, f(N)\}^T$ ,  $N$  — число элементов во временном ряде.

В работе [2] использовался принцип максимизации информации, на основе которого выводился алгоритм адаптивного вычисления весовых коэффициентов  $\mathbf{W}$ . Следовательно, авторы проводили настройку, снижая статистическую корреляцию между точками  $u(n)$ . Этот подход известен как *отбеливание*  $u(n)$ , поскольку выборки в последовательности белого шума статистически независимы. Чтобы достичь этого, необходимо устранить статистические корреляции высоких порядков. Для этого  $u(n)$  подается в систему с нелинейной передаточной функцией  $g[u(n)]$  и максимизируется инфор-

мация на выходе системы  $y(n) = g[u(n)]$ . Обновление коэффициентов происходит по следующим формулам:

$$\Delta w(L - j) \propto \sum_{n=j}^N \left( \frac{1}{w(L)} - 2x(n)y(n) \right) \quad (5.115)$$

и

$$\Delta w(L - j) \propto \sum_{n=j}^N (-2x(n - 1)y(n)). \quad (5.116)$$

Алгоритм продолжает выполняться, пока  $\Delta w(L)$  и  $\Delta w(L - j)$  не станет малым. Затем с использованием найденных весовых коэффициентов задержек и данных, подлежащих обработке, реализуется соответствующий фильтр.

### 5.3.6. Быстрая линейная свертка

В разделе 5.2.3, было показано, что вычисление свертки можно ускорить с помощью теоремы о корреляции. Существует также подобная *теорема о свертке*. Итак, используя дискретную терминологию и временную область, можно записать

$$x_1(l) \circledast x_2(r) = F_D^{-1}[X_1(k)X_2(k)]. \quad (5.117)$$

Уравнение (5.117) является формулировкой *теоремы о свертке*, где  $F_D^{-1}$  обозначает обратное дискретное преобразование Фурье,  $X_1(k)$  — ДПФ-образ  $x_1(l)$ ,  $X_2(k)$  — ДПФ-образ  $x_2(r)$ . Как и в разделе 5.2.3,  $x_1(l)$  и  $x_2(r)$  — периодические последовательности длины  $N$ .

#### 5.3.6.1. Доказательство теоремы о свертке

Доказательство данной теоремы практически идентично доказательству теоремы о корреляции, приведенному в разделе 5.2.3. При свертке одна из последовательностей данных обращена, так что вместо уравнения (5.65) применяется сопряженное:

$$X_1(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l) e^{(2\pi i/N)(-lk)}, \quad (5.118)$$

при этом уравнение (5.66) остается без изменений:

$$X_2(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r) e^{(2\pi i/N)(-rk)}. \quad (5.119)$$

Следовательно, повторно определив  $x_3(n)$  как периодическую последовательность длины  $N$  с ДПФ-образом  $X_3(l)$ ,  $X_3(k)$  можно записать как

$$X_3(k) = X_1(k)X_2(k). \quad (5.120)$$

После этого применяется процедура, описанная в разделе 5.2.3, приводящая в конечном итоге к искомому результату:

$$x_1(l) \circledast x_2(r) = F_D^{-1}[X_1(k)X_2(k)] \quad (5.121)$$

для свертки во временной области. Для свертки в частотной области применяется аналогичное уравнение:

$$\frac{1}{N}[X_1(k) \circledast X_2(k)] = F_D[x_1(l)x_2(r)]. \quad (5.122)$$

Последние две формулы представляют периодические, или круговые, свертки, которые можно преобразовать в линейные с помощью дополняющих нулей, как описано в разделе 5.3.2.

### 5.3.7. Вычислительные преимущества быстрой линейной свертки

Метод быстрой линейной свертки предлагает преимущества меньшей вычислительной сложности по сравнению с прямым подходом, только если число значений, подлежащих свертке, достаточно велико. Ниже сравнивается число умножений, требуемых для выполнения свертки с помощью прямого и быстрого методов, выбранное в качестве меры их относительной вычислительной эффективности.

Необходимые расчеты для прямого метода выполняются согласно уравнению (5.90). Очевидно, что для получения линейной свертки двух  $N$ -точечных последовательностей  $h(n-m)$  и  $x(m)$  необходимо умножить каждое значение  $h(n-m)$  на каждое значение  $x(m)$ . Следовательно,  $N$  значений  $h(n-m)$  нужно перемножить с  $N$  значениями  $x(m)$ , в результате всего требуется  $N \times N = N^2$  умножений.

Рассмотрим теперь линейную свертку тех же двух  $N$ -точечных последовательностей с помощью быстрого метода, записанного в уравнении (5.121). Прибавление необходимых дополняющих нулей означает, что каждая последовательность имеет длину  $2N-1$  точек. Предположим, что  $2N-1 \approx 2N$ , например,  $N \geq 8$ , и что для использования БПФ по основанию 2  $N$  — целая степень 2, т.е.  $N = 2^d$ , где  $d$  — целое. Можно показать, что число комплексных умножений для  $N$ -точечного БПФ равно  $(N/2) \log_2 N$  (раздел 3.5.3), так что для  $2N$ -точечного БПФ необходимо  $(2N/2) \log_2 2N$  или  $N \log_2 2N$  комплексных умножений. Согласно уравнению (5.121) требуется вычислить два ДПФ и одно обратное ДПФ. Для расчета обратного ДПФ можно использовать модифицированное ДПФ (раздел 3.6). Таким образом, необходимо вычислить три  $2N$ -точечных БПФ, включающих в сумме  $3N \log_2 2N$  комплексных умножений. Для каждого из  $2N$  значений уравнения (5.121) необходимо выполнить комплексное умножение  $X_1(k)X_2(k)$ , таким образом общее число комплексных умножений возрастает до  $3N \log_2 2N + 2N$ . Далее каждое комплексное умножение вида  $(A+iB)(C+iD)$  требует четырех действительных умножений  $AC, AD, BC$  и  $BD$ . Значит, в целом необходимо  $12N \log_2 2N + 8N$  действительных умножений.

Таким образом, можно сделать вывод, что прямой метод требует  $N^2$  действительных умножений, тогда как метод быстрой свертки требует  $12N \log_2 2N + 8N$  умножений. В табл. 5.1 сравниваются числа действительных умножений, необходимые для различных значений  $N$ . Из таблицы видно, что быстрая свертка лучше прямого метода, если

длина последовательностей превышает 128 точек данных, причем для последовательностей из 1024 точек быстрая свертка дает результат за время, меньшее примерно в 10 раз. Тот же вывод справедлив и для прямой и быстрой корреляции.

**Таблица 5.1.** Число действительных умножений, требуемых для выполнения свертки двух  $N$ -точечных последовательностей

$N$	Прямой метод	Быстрая свертка	(Быстрая свертка)/(прямой метод)
8	64	448	7
16	256	1 088	4,25
32	1 024	2 560	2,5
64	4 096	5 888	1,4375
128	16 384	13 312	0,8125
256	65 536	29 696	0,4531
512	262 144	65 536	0,250
1024	1 048 576	143 360	0,1367
2048	4 194 304	311 296	0,0742

### 5.3.8. Свертка и корреляция путем сегментации

До этого момента предполагалось, что две функции, подлежащие свертке (или расчету корреляции), имеют конечную длительность. Впрочем, это справедливо не всегда. Например, можно считать, что входные данные имеют бесконечную длительность либо потому, что они поступают фактически непрерывно, либо (более вероятная причина) потому, что доступная память недостаточно велика, чтобы вместить их все. В подобных случаях свертку (или корреляцию) необходимо выполнять поэтапно, разделив входные данные на отдельные блоки, выполнив необходимые вычисления для каждого блока и затем объединив результаты. Для реализации подобной схемы используются два метода: наложения-сложения (overlap-add) и наложения-записи (overlap-save), которые будут описаны ниже. Перед этим, впрочем, необходимо рассмотреть, как повысить эффективность вычислений, если две функции не начинаются в нулевой момент времени.

На рис. 5.25 показаны два дискретных сигнала  $x(n)$  и  $h(n)$ , а также их свертка  $x(n) \otimes h(n) = y(n)$ . Сигналы  $x(n)$  и  $h(n)$  начинаются соответственно в моменты  $a$  и  $b$ , поэтому если  $a$  и  $b$  велики по сравнению с количеством данных  $N_1$  и  $N_2$  в  $x(n)$  и  $h(n)$  соответственно, то во многих тактах вычислений будут фигурировать расчеты с нулевыми данными. Число этих вычислений можно уменьшить, сместив сигналы так, чтобы они выходили из начала координат, как показано на рис. 5.26. После этого данные необходимо дополнить нулями, чтобы оба сигнала содержали равное число точек  $N = N_1 + N_2 - 1$ , и их периодическая свертка соответствовала линейной свертке двух сигналов. Свертка выполняется согласно теореме о свертке (уравнение (5.117)) и алгоритму БПФ. Чтобы полученный результат был правильным, вычисленную свертку необходимо так сместить вдоль оси  $n$ , чтобы она начиналась в точке  $n = a + b$  (рис. 5.26,  $z$ ). На приведенном рисунке предполагается, что  $N = 2^d$ , где  $d$  — целое, поэтому можно использовать БПФ по основанию 2.

Аналогичная иллюстрация для корреляции  $x(n)$  и  $h(n)$ ,  $r_{xh}(n)$ , приведена на рис. 5.27. При трансляции указанных сигналов в начало координат вводятся дополнительные нули, так что  $N = 2^d \geq N_1 + N_2 - 1$ , и корреляция вычисляется согласно теореме о

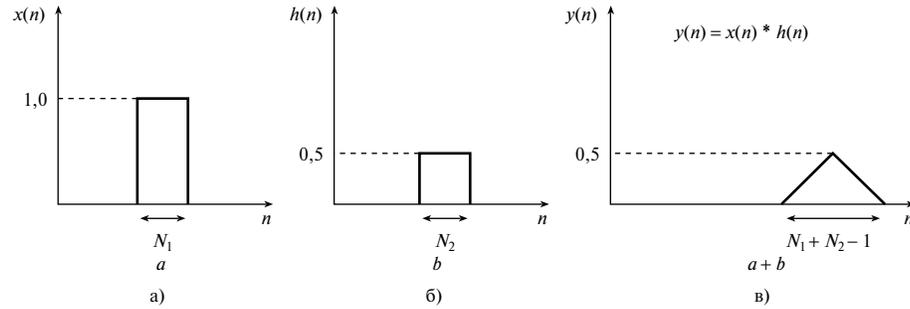


Рис. 5.25. Свертка  $y(n) = x(n) \otimes h(n)$  двух сигналов  $x(n)$  и  $h(n)$ , не выходящих из начала координат

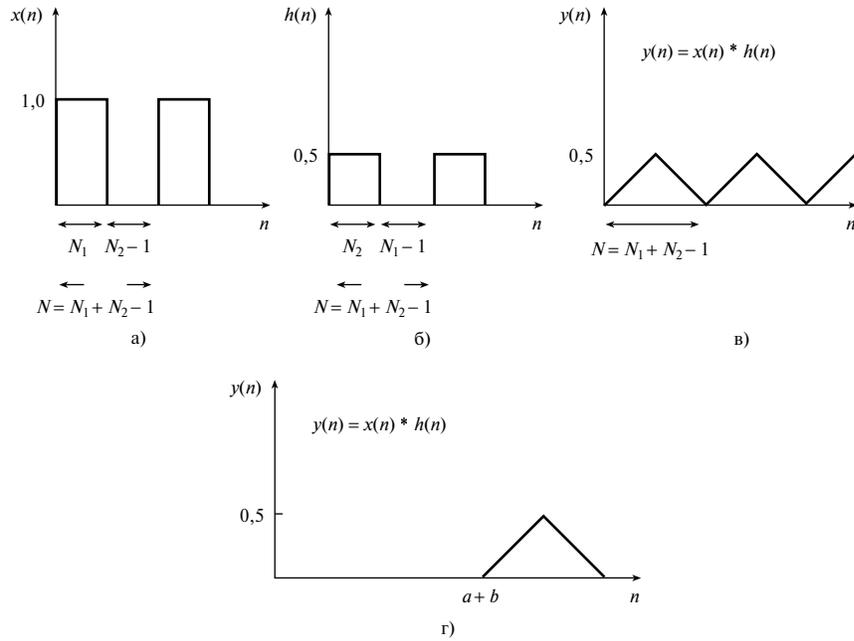
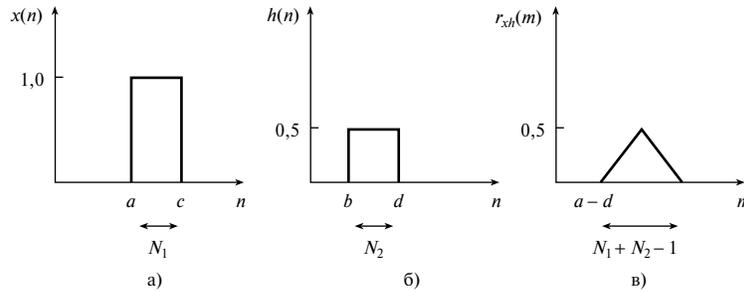
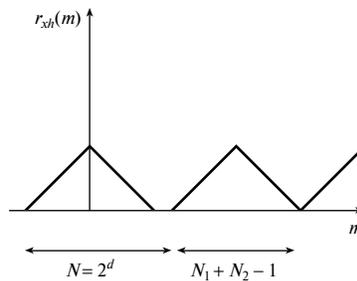


Рис. 5.26. Свертка двух сигналов, изображенных на рис. 5.25, для получения которой  $x(n)$  и  $h(n)$  транслировались в начало координат. Прибавление к  $x(n)$   $N_2 - 1$  дополняющих нулей (панель а). Прибавление к  $h(n)$   $N_1 - 1$  дополняющих нулей (панель б). Свертка  $y(n) = x(n) \otimes h(n)$  (панель в). Правильная линейная свертка получается заменой  $y(n)$  вдоль оси  $n$  функции, начинающейся в точке  $n = a + b$  (панель г)



**Рис. 5.27.** Взаимная корреляция  $r(m)$  двух сигналов  $x(n)$  и  $h(n)$ , которые начинаются не в начале координат: а)  $x(n)$ ; б)  $h(n)$ ; в)  $r_{xh}(m)$



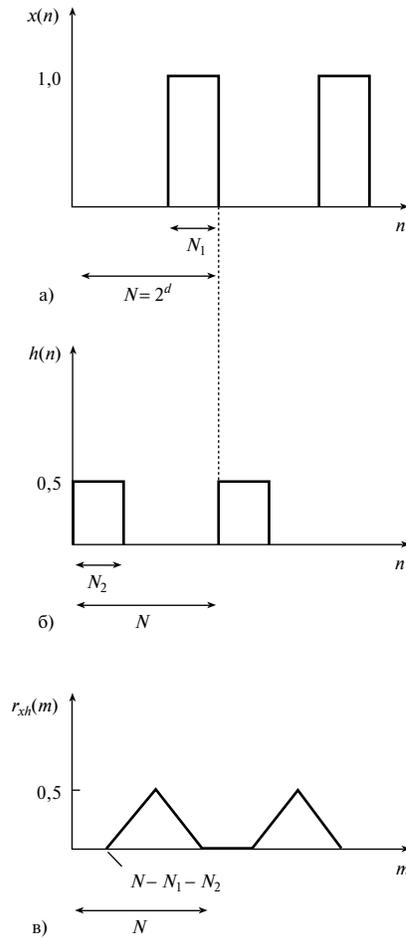
**Рис. 5.28.** Неверная взаимная корреляция, полученная при трансляции  $x(n)$  и  $h(n)$  в начало координат

корреляции (формула (5.77)). Получающийся результат представлен на рис. 5.28. Это не периодическая копия рис. 5.27, в, хотя и содержит правильную базовую форму сигнала. Искомый периодический результат можно получить, перенеся  $x(n)$  в точку  $n = N - N_1 + 1$ , при этом расположив  $h(n)$  в точке  $n = 0$ , как на рис. 5.29, где видно, что в результате указанных действий получается требуемая периодическая корреляционная функция (рис. 5.29, в). Полученный результат нужно сместить на  $a - d - N + N_1 + N_2$  точек данных вправо, чтобы переместить в верное значение  $a - d$  (сравните с рис. 5.29, в).

Распространим теперь приведенные соображения на задачу с бесконечной последовательностью  $x(n)$ , которую нужно свернуть с конечной последовательностью  $h(n)$ .

### 5.3.9. Метод наложения-сложения

Пусть  $x(n)$  делится на сегменты равной длины, состоящие из  $N_1$  точек данных. Далее предположим, что данные последовательности периодичны и требуется найти их свертку с  $N_2$  точками данных (последовательность  $h(n)$ ), дополненными  $N_1 - N_2$  нулями, так что теперь обе последовательности периодичны и имеют длину  $N_1$ . Результат этой свертки будет неверным, поскольку для получения правильного результата каждая последовательность должна иметь длину  $N = N_1 + N_2 - 1$ . Впрочем, каждый сегмент  $x(n)$  имеет длину  $N_1$  (и эту величину увеличить нельзя). Чтобы устранить эту проблему, можно рассмотреть сегменты  $x(n)$  с длиной  $N$  и заменить последние  $N_2 - 1$  точек данных нулями, расширив первоначальные  $N - N_2 + 1 = N_1$  данных (рис. 5.30).



**Рис. 5.29.** Метод получения правильной взаимной корреляции двух последовательностей  $x(n)$  и  $h(n)$ : а)  $x(n)$  смещается в  $N - N_1 + 1$ ; б)  $h(n)$  смещается в начало координат; в) получающийся правильный периодический коэффициент взаимной корреляции  $r_{xh}(m)$

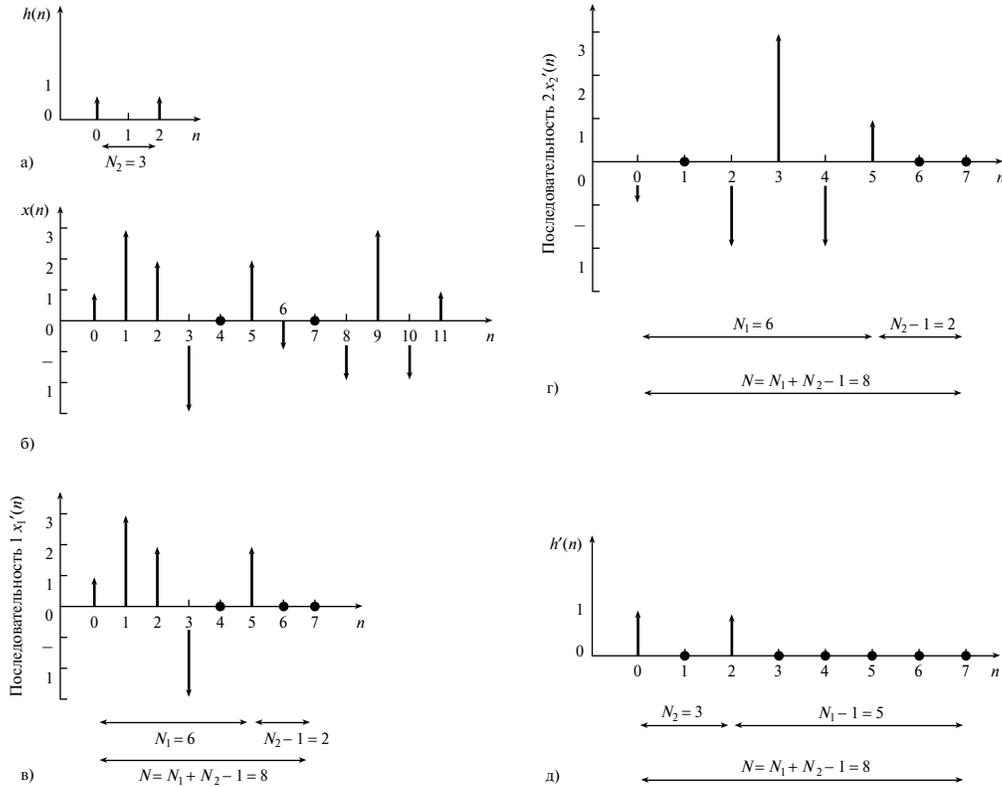


Рис. 5.30. Свертка методом наложения-сложения

Подобным способом последовательность  $N_1$  данных  $x(n)$  с  $N_2 - 1$  дополняющими нулями сворачивается с  $N_2$  данными последовательности  $h(n)$  с  $N_2 - 1$  дополняющими нулями. Обе последовательности содержат  $N = N_1 - 1 + N_2 - 1$  точек данных, и их свертка находится правильно (рис. 5.31). Та же процедура выполняется для оставшихся последовательностей  $x(n)$  длины  $N$ . Поскольку последние  $N_2 - 1$  точек данных сегментов  $x(n)$  были заменены нулями, получающиеся сверточные функции ошибочны в первых и последних  $N_2 - 1$  точках каждой свертки, но все эти точки суммируются и дают правильную свертку при трансляции каждого свернутого сигнала в точку его истинного начала ( $a + b$ ), а последние  $N_2 - 1$  точек свертки находятся путем наложения одного сегмента на другой. Данный процесс иллюстрируется на рис. 5.31. Подытожим: вначале для устранения краевых эффектов к сегментам добавляется достаточное число нулей, затем результаты свертки накладываются друг на друга точно так, как последовательность длиной  $N_1$  дополнялась нулями, а затем находится их сумма. Название метода — *наложение-сложение* — следует непосредственно из выполняемых действий.

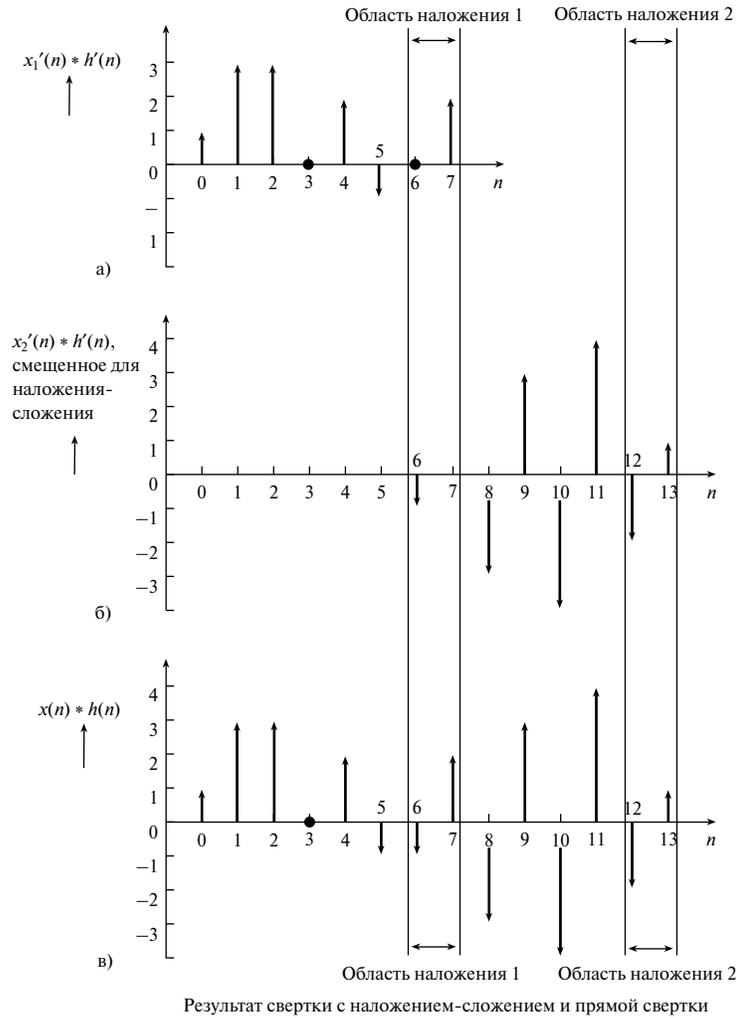


Рис. 5.31. Эквивалентность метода наложения-сложения и прямой свертки

### Пример 5.10

Используйте процедуру наложения-сложения, чтобы найти свертку двух последовательностей  $h(n) = \{1; 0; 1\}$  и  $x(n) = \{1; 3; 2; -3; 0; 2; -1; 0; -2; 3; -2; 1; \dots\}$ .

### Решение

Пусть последовательность  $x(n)$  разбита на сегменты длиной  $N_1 = 6$ , при этом  $N$  (число точек в ДПФ) равно  $N_1 + N_2 - 1 = 6 + 3 - 1 = 8 = 2^d$ , где  $d = 3$ , таким образом удовлетворяются требования к использованию линейной свертки и БПФ по основанию 2.

Дополняя  $h(n)$  нулями, получаем последовательность  $h'(n)$ :

$$h'(n) = \{1; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0\}.$$

Первые две расширенные последовательности  $x(n)$  имеют такой вид:

$$x'_1(n) = \{1; 3; 2; -3; 0; 2; 0; 0\}$$

и

$$x'_2(n) = \{-1; 0; -2; 3; -2; 1; 0; 0\}.$$

Сверточная сумма  $x'_1(n) \otimes h'(n)$  содержит следующие члены:

$$\begin{aligned} y_{10} &= h'_0 x'_{10} = 1, \\ y_{11} &= h'_0 x'_{11} + h'_1 x'_{10} = 3 + 0 = 3, \\ y_{12} &= h'_0 x'_{12} + h'_1 x'_{11} + h'_2 x'_{10} = 2 + 0 + 1 = 3, \\ y_{13} &= h'_0 x'_{13} + h'_1 x'_{12} + h'_2 x'_{11} = -3 + 0 + 3 = 0, \\ y_{14} &= h'_0 x'_{14} + h'_1 x'_{13} + h'_2 x'_{12} = 0 + 0 + 2 = 2, \\ y_{15} &= h'_0 x'_{15} + h'_1 x'_{14} + h'_2 x'_{13} = 2 + 0 - 3 = -1, \\ y_{16} &= h'_0 x'_{16} + h'_1 x'_{15} + h'_2 x'_{14} = 0 + 0 + 0 = 0, \\ y_{17} &= h'_0 x'_{17} + h'_1 x'_{16} + h'_2 x'_{15} = 0 + 0 + 2 = 2. \end{aligned}$$

Сверточная сумма  $x'_2(n) \otimes h'(n)$  состоит из таких компонентов:

$$\begin{aligned} y_{20} &= h'_0 x'_{20} = -1, \\ y_{21} &= h'_0 x'_{21} + h'_1 x'_{20} = 0 + 0 = 0, \\ y_{22} &= h'_0 x'_{22} + h'_1 x'_{21} + h'_2 x'_{20} = -2 + 0 - 1 = -3, \\ y_{23} &= h'_0 x'_{23} + h'_1 x'_{22} + h'_2 x'_{21} = 3 + 0 + 0 = 3, \\ y_{24} &= h'_0 x'_{24} + h'_1 x'_{23} + h'_2 x'_{22} = -2 + 0 - 2 = -4, \\ y_{25} &= h'_0 x'_{25} + h'_1 x'_{24} + h'_2 x'_{23} = 1 + 0 + 3 = 4, \\ y_{26} &= h'_0 x'_{26} + h'_1 x'_{25} + h'_2 x'_{24} = 0 + 0 - 2 = -2, \\ y_{27} &= h'_0 x'_{27} + h'_1 x'_{26} + h'_2 x'_{25} = 0 + 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Приведенные выше сверточные суммы показаны на рис. 5.31, *а* и *б* соответственно. Если первые  $N_2 - 1 = 2$  точки данных  $x'_2$  наложить на последние  $N_2 - 1$  точек данных  $x'_1$  и просуммировать сверточные суммы, получатся первые 12 точек данных итогового сверточного сигнала, показанные на рис. 5.31, *в*.

Можно показать, что приведенный выше результат идентичен тому, который получается при прямом вычислении свертки. Исходная последовательность  $x(n)$  содержит 12, а  $h(n)$  — 3 точки данных. Чтобы получить линейную свертку этих двух последовательностей, их нужно дополнить нулями, чтобы длина обеих составляла  $12+3-1 = 14$  точек данных. Таким образом, последовательности становятся равными

$$h'(n) = \{1; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0\}$$

и

$$x(n) = \{1; 3; 2; -3; 0; 2; -1; 0; -2; 3; -2; 1; 0; 0\}.$$

Ниже приводятся первые девять членов сверточной суммы.

$$\begin{aligned} y_0 &= h'_0 x'_0 = 1, \\ y_1 &= h'_0 x'_1 + h'_1 x'_0 = 3, \\ y_2 &= h'_0 x'_2 + h'_1 x'_1 + h'_2 x'_0 = 2 + 0 + 1 = 3, \\ y_3 &= h'_0 x'_3 + h'_1 x'_2 + h'_2 x'_1 = -3 + 0 + 3 = 0, \\ y_4 &= h'_0 x'_4 + h'_1 x'_3 + h'_2 x'_2 = 0 + 0 + 2 = 2, \\ y_5 &= h'_0 x'_5 + h'_1 x'_4 + h'_2 x'_3 = 2 + 0 - 3 = -1, \\ y_6 &= h'_0 x'_6 + h'_1 x'_5 + h'_2 x'_4 = -1 + 0 + 0 = -1, \\ y_7 &= h'_0 x'_7 + h'_1 x'_6 + h'_2 x'_5 = 0 + 0 + 2 = 2, \\ y_8 &= h'_0 x'_8 + h'_1 x'_7 + h'_2 x'_6 = -2 + 0 - 1 = -3. \end{aligned}$$

Члены этой сверточной суммы действительно идентичны величинам, полученным методом наложения-сложения, изображенным на рис. 5.31, в.

На основе сказанного можно вывести следующую процедуру наложения-сложения для быстрой свертки (или корреляции) с помощью сегментации.

1. Выбрать число  $N_1$  данных последовательности  $x(n)$  порядка числа  $N_2$  данных последовательности  $h(n)$  (причем  $N_1 > N_2$ ) и число точек ДПФ в виде  $N = 2^d$ , где  $d$  — целое и  $N \gg N_1 + N_2 - 1$ . Для удовлетворения этим условиям последовательности данных при необходимости дополняются нулями.
2. Сместить расширенные сегменты данных  $x(n)$  в начало координат.
3. Для каждого расширенного сегмента данных  $x(n)$ ,  $x'(n)$ , найти быструю свертку  $x'(n) \otimes h'(n)$ , т.е. вычислить  $X(k)H(k)$  и затем применить обратное преобразование.
4. Последовательно наложить полученные свертки, совмещая последние  $N_2 - 1$  точек одного результата с  $N_2 - 1$  первыми точками другого, и просуммировать свертки.

### 5.3.10. Метод наложения-записи

Рассмотрим еще раз свертку  $x(n) \otimes h(n)$ , проиллюстрированную на рис. 5.32, где к  $h(n)$  добавлено  $N_2 - 1$  нулей, так что обе последовательности имеют длину  $N_1$ . Чтобы получить линейную свертку указанных последовательностей,  $h(n)$  можно последовательно (по одной точке) смещать  $h(n)$  вправо, проводить перекрестное умножение

← $N_1$ данных →										← $N_2 - 1$ пропущенных нулей →					
$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	...	...	...	$x_{N-1}$	$x_N$	0	0
$h_2$	$h_1$	$h_0$	0	0	0	0	0	0	...	...	...	0	0	0	0
← $N_2$ данных →															

Рис. 5.32. Последовательности  $x(n)$  и  $h(n)$ , причем  $h(n)$  дополнена  $N_2 - 1$  нулями

соответствующих членов и суммировать результаты. В то же время, поскольку ни одна последовательность не имеет длины  $N_1 + N_2 - 1$ , результат не будет равен  $x(n) \otimes h(n)$ . Фактически, если длина последовательности  $x(n)$  равна  $N_1$ , пропущено  $N_2 - 1$  нулей. Это означает, что первые  $N_2 - 1$  членов сверточной суммы будут неверными, и их следует отбросить. Следовательно, если данные  $x(n)$  делятся на смежные сегменты длины  $N_1$ , первые  $N_2 - 1$  значений каждой сверточной суммы следует отбрасывать. Значит, свертка  $x(n) \otimes h(n)$  будет содержать периодическую последовательность пропусков длины  $N_2 - 1$ . Данные пропуски можно корректно заполнить, наложив последние  $N_2 - 1$  точек данных каждой последовательности  $x(n)$  длины  $N_1$  на первые  $N_2 - 1$  точек данных следующей последовательности, а затем отбросив эти первые  $N_2 - 1$  точек данных. Описанная процедура известна как *метод наложения-записи*.

### Пример 5.11

Используйте процедуру наложения-записи для свертки последовательностей, приведенных в разделе 5.3.9, т.е.

$$h(n) = \{1; 0; 1\}$$

и

$$x(n) = \{1; 3; 2; -3; 0; 2; -1; 0; -2; 3; -2; 1\}.$$

### Решение

Поскольку для  $h(n)$   $N_2 = 3$ , величина наложения  $N_2 - 1 = 2$ . Само наложение выполняется так, как показано на рис. 5.33. Ниже приводится расчет сверток для каждого сегмента.

Для сегмента 1:

$$y_{10} = h'_0 x'_{10} = 1,$$

$$y_{11} = h'_0 x'_{11} + h'_1 x'_{10} = 3 + 0 = 3,$$

$$y_{12} = h'_0 x'_{12} + h'_1 x'_{11} + h'_2 x'_{10} = 2 + 0 + 1 = 3,$$

$$y_{13} = h'_0 x'_{13} + h'_1 x'_{12} + h'_2 x'_{11} + h'_3 x'_{10} = -3 + 0 + 3 + 0 = 0.$$

Следовательно,

$$y_1 = \{1; 3; 3; 0\}.$$

Для остальных сегментов следует помнить, что  $h_1 = h_3 = 0$ . Итак, для сегмента 2 получаем:

$$\begin{aligned} y_{20} &= h'_0 x'_{20} = 2, \\ y_{21} &= h'_0 x'_{21} = -3, \\ y_{22} &= h'_0 x'_{22} + h'_2 x'_{20} = 2 + 0 = 2, \\ y_{23} &= h'_0 x'_{23} + h'_2 x'_{21} + h'_2 x'_{21} = 2 - 3 = -1, \\ y_2 &= \{2; -3; 2; -1\}. \end{aligned}$$

Подобным образом, для сегмента 3 получаем:

$$y_3 = \{0; 2; -1; 2\}.$$

Для сегмента 4:

$$y_4 = \{-1; 0; -3; 3\}.$$

Наконец, для сегмента 5 находим:

$$y_5 = \{-2; 3; -4; 4\}.$$

Данные результаты иллюстрируются в табл. 5.2, из которой видно, что первые  $N_2 - 1$  результатов каждой последовательности отбрасываются. Последняя строка кроме первой позиции содержит правильное значение свертки.

**Таблица 5.2.** Результаты решения примера 5.11

Сегмент 1	$y_0$	$\underbrace{1 \ 3}$ отбрасывается	$3 \ 0$				
Сегмент 2	$y_1$		$\underbrace{2 \ 3}$ отбрасывается	$2 \ -1$			
Сегмент 3	$y_2$			$\underbrace{0 \ 2}$ отбрасывается	$-1 \ 2$		
Сегмент 4	$y_3$				$\underbrace{-1 \ 0}$ отбрасывается	$-3 \ 3$	
Сегмент 5	$y_4$					$\underbrace{-2 \ 3}$ отбрасывается	$-4 \ 4$
$x(n) \otimes h(n)$		$\underbrace{1 \ 3}$ отбрасывается	$3 \ 0$	$2 \ -1$	$-1 \ 2$	$\underbrace{-3 \ 3}$ отбрасывается	$-4 \ 4$

Таким образом, получаем следующую процедуру наложения-записи.

1. Выбрать число точек данных последовательности  $x(n)$  равным  $N_1 = 2^d$  и добавить к  $h(n)$   $N_2 - 1$  нулей, чтобы обе последовательности имели длину  $N_1$ .
2. Разместить обе последовательности в начале координат.
3. Для каждой последовательности вычислить соответствующие значения  $X(k)$  и  $X(k)$ , используя БПФ.

$h(n)$	1	0	1									
$x(n)$	1	3	2	-3	0	2	-1	0	-2	3	-2	1
Участок 1	1	3	2	-3								
Участок 2			2	-3	0	2						
Участок 3					0	2	-1	0				
Участок 4							-1	0	-2	3		
Участок 5									-2	3	-2	1

Рис. 5.33. Наложение сегментов для выполнения свертки методом наложения-записи

4. Вычислить  $X(k)H(k)$  и обратное к нему, которое равно свертке каждой последовательности с  $h(n)$ .
5. Расположить все свертки так, чтобы каждая следующая совмещалась с предыдущей по  $N_2 - 1$  точкам.
6. Отбросить первые  $N_2 - 1$  точек данных каждой свертки и считать оставшиеся значения, которые соответствуют верной свертке.

### 5.3.11. Вычислительные преимущества быстрой свертки через сегментацию

В разделе 5.3.8 показано, что ненужных вычислений можно избежать, перенеся начало каждого сегмента в начало координат. Предположим, что это уже сделано. Затем допустим, что вычислительные требования методов наложения-сложения и наложения-записи подобны, поэтому достаточно рассмотреть только первый из этих методов. Предполагается, что последовательность  $x(n)$  длины  $N$  делится на  $N/N_1$  сегментов, каждый из которых имеет длину  $N_1$ , что последовательность  $h(n)$  имеет длину  $N_2$  и что длины последовательностей, подлежащих линейной свертке, равны  $N^1 = 2^d \geq N_1 + N_2 - 1$ . Кроме того, в разделе 5.3.7 было показано, что для выполнения быстрой свертки двух  $N^1$ -точечных последовательностей требуется  $12N^1 \log_2 2N^1 + 8N^1$  действительных умножений. Следовательно, чтобы выполнить быструю свертку  $N$ -точечной последовательности  $x(n)$  с помощью метода наложения-сложения, потребуется  $(N/N^1)(12N^1 \log_2 2N^1 + 8N^1) = R_m(S)$  действительных операций умножения. Отсюда следует, что длина сворачиваемых последовательностей  $N^1$  должна быть малой, а длины  $N_1$  сегментов  $x(n)$  — близкими к  $N^1$ . В идеальном случае  $N^1 = 2^d = N_1 + N_2 - 1$ . Число действительных умножений, необходимых для обработки исходной  $N$ -точечной последовательности, равно  $12N \log_2 2N + 8N = R_m(N)$ . Из табл. 5.3 следует, что для примера из раздела 5.3.9 отношение  $R_m(S)/R_m(N) \leq 1$ , при этом экономия времени вычислений может составлять порядка 50%.

**Таблица 5.3.** Отношение  $R_m(S)/R_m(N)$  (числа действительных умножений для метода сегментации к числу действительных умножений при быстрой свертке обычным образом)

$N$	$N^1$	$N_1$	$N/N_1$	$N_2$	$R_m(S)/R_m(N)$	<i>Комментарий</i>
1020	8	6	170	3	0,54	Наилучший результат при малом $N^1$ , $N_1 \approx N^1$
1024	256	254	4	3	0,83	$N_1 \approx N^1$
1020	128	102	10	3	0,93	
1020	256	204	5	3	1,04	

### 5.3.12. Связь между сверткой и корреляцией

При свертке значение  $n$ -го выхода определяется сверточной суммой, представленной в формуле (5.93):

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(n)x(0). \quad (5.123)$$

Значение функции взаимной корреляции для сигналов  $h(n)$  и  $x(n)$  для  $i$ -й задержки представлено в формуле (5.1), которая в несколько модифицированном виде выглядит так:

$$\begin{aligned} r_{hx}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)x(j+n) = \\ &= \frac{1}{N} [h(0)x(j) + h(1)x(j+1) + \dots + h(N-1)x(j+N-1)]. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Сравнить  $y(n)$  и  $r_{hx}(j)$  проще всего, если  $j = 0$ , т.е. при нулевой задержке. В этом случае уравнение (5.124) приводится к такому виду:

$$\begin{aligned} r_{hx}(0) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)x(n) = \\ &= \frac{1}{N} [h(0)x(0) + h(1)x(1) + \dots + h(N-1)x(N-1)]. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Сравнивая уравнения (5.123) и (5.125), находим, что они имеют сходную форму, за исключением того, что последовательность  $x(n)$  в функции взаимной корреляции идет в обратном порядке по сравнению с тем, как она идет в свертке. Следовательно, свертка эквивалентна функции взаимной корреляции двух сигналов, в которой одна из исходных последовательностей обращена во времени, а нормировочный коэффициент  $1/N$  равен единице. Это означает, что свертки и корреляции можно вычислять с помощью одной компьютерной программы, просто обращая одну из последовательностей.

## 5.4. Реализация корреляции и свертки

При рассмотрении реализации указанных операций следует помнить, что они тесно связаны. Для двух последовательностей данных можно легко найти их корреляцию или свертку, причем вычисления будут отличаться только порядком одной последовательности. Более того, для более длинных последовательностей данных необходимые операции можно ускорить, используя методы быстрого преобразования Фурье, чтобы получить быструю корреляцию или быструю свертку. Если одна последовательность имеет чересчур большую длину, можно использовать методы наложения-сложения или наложения-записи; см. разделы 5.3.9 и 5.3.10 и работы [3, 5, 14].

Свертку или корреляцию можно выполнять, используя, например, КИХ-фильтр, реализуемый с помощью БПФ, а также применяя согласованный фильтр, как показано в разделе 5.2.2 (рис. 5.13). В сфере цифровой обработки для реализации трансверсальных фильтров может использоваться технология приборов с зарядовой связью (ПЗС). Это позволяет получать линейную фазовую характеристику при скоростях передачи данных, превышающих 100 МГц при стандартных конфигурациях линий задержки [6]. Аналоговую обработку можно выполнять, реализовав линии задержки с отводами, используя устройства с поверхностными акустическими волнами (ПАВ) [6]. Эти устройства работают в диапазоне от 2 МГц до 2 ГГц. Другие реализации можно получить на основе конвольверов и корреляторов, универсальных цифровых процессоров сигналов, стандартных микропроцессоров и транспьютеров. В качестве примеров последних можно привести системы реального времени для устранения окулярных артефактов из всех 16 каналов ЭКГ человека [8].

Время вычислений, необходимых для быстрой корреляции и свертки, можно дополнительно сократить в два раза [3]. Рассмотрим свертку  $x(n)$  и  $h(n)$ . При вычислении  $X(k)$  действительная часть БПФ заполняется четными членами  $x(n)$ , а мнимая часть — нечетными, и длина БПФ вполнину сокращается. Далее действительная часть  $(1/N)F_D^{-1}[X(k)H(k)]$  дает четные члены искомой сверткой, а мнимая часть — нечетные.

Аналогично свертку двух последовательностей данных  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  с  $h(n)$  можно вычислить одновременно. Заполним действительную часть БПФ элементами последовательности  $x_1(n)$ , а мнимую часть — элементами последовательности  $x_2(n)$  и вычислим  $X^1(k)$ . Действительная часть  $(1/N)F_D^{-1}[X^1(k)H(k)]$  равна  $x_1(n) \otimes h(n)$ , а мнимая часть —  $x_2(n) \otimes h(n)$ .

## 5.5. Примеры применения

### 5.5.1. Корреляция

#### Пример 5.12

Данный упрощенный пример касается применения теории корреляции для управления положением в пространстве космического аппарата, чтобы солнечная батарея всегда была обращена к солнцу. Ошибки определения положения представлены как

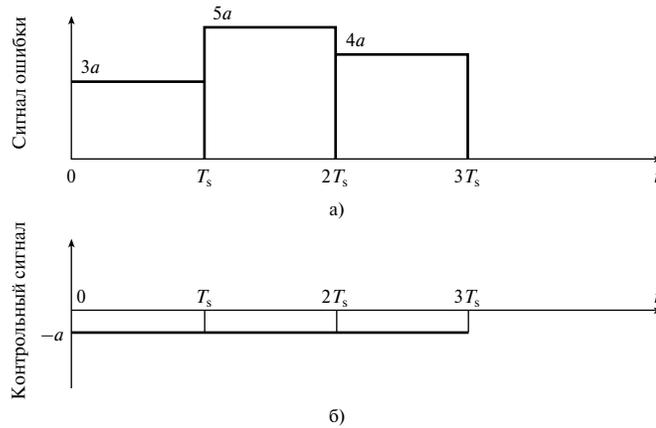


Рис. 5.34. Контроль за положением космического аппарата: а) сигнал ошибки; б) контрольный сигнал

многоуровневые импульсы с разрешением уровней  $a = 0,2$  мВ, ширина импульса  $T_s = 1$  мкс. Изначально контроль за ошибкой положения космического аппарата при наличии положительной ошибки выполняется путем передачи последовательности отрицательных импульсов высоты  $a$ . Система контроля считается удовлетворительной только в том случае, если коэффициент корреляции между ошибкой и контрольными сигналами меньше  $-0,5$ . На рис. 5.34, а показаны три импульса ошибки, а на рис. 5.34, б — соответствующие импульсы контрольного сигнала. В данном примере предполагается, что этих импульсов достаточно и что рассматривать задержку, превышающую  $T_s$ , не нужно. Таким образом задача состоит в том, чтобы определить, можно ли рассматривать систему как удовлетворительную.

Можно доказать, что  $r_{12}(\tau) > 0,5$  для  $0 \leq \tau \leq T_s$ . Взаимную корреляцию можно найти, сместив контрольный сигнал вправо, не меняя при этом сигнал ошибки. Это означает, что требуется найти  $r_{12}(-\tau)$ .

Итак,

$$r_{12}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t)v_2(t-\tau)dt,$$

где  $v_1(t)$  — сигнал ошибки,  $v_2(t)$  — контрольный сигнал.

$$\begin{aligned} r_{12}(-\tau) &= \frac{1}{3T_s} \int_{\tau}^{T_s} 3a(-a)dt + \frac{1}{3T_s} \int_{T_s}^{2T_s} 5a(-a)dt + \frac{1}{3T_s} \int_{2T_s}^{3T_s} 4a(-a)dt = \\ &= \frac{a^2}{3T_s} \{ [-3t]_{\tau}^{T_s} + [-5t]_{T_s}^{2T_s} + [-4t]_{2T_s}^{3T_s} \} = \\ &= \frac{a^2}{3T_s} (-3T_s + 3\tau - 10T_s + 5T_s - 12T_s + 8T_s) = \\ &= \frac{a^2}{3T_s} (-12T_s + 3\tau). \end{aligned}$$

Здесь  $r_{12}(\tau)$  нормировано (принадлежит диапазону  $-1 \leq r_{12}(r) \leq 1$ ) путем деления на следующий нормировочный коэффициент:

$$\frac{1}{3T_s} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v_1^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} v_2^2(t) dt \right]^{1/2}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v_1^2(t) dt &= \int_0^{T_s} (3a)^2 dt + \int_{T_s}^{2T_s} (5a)^2 dt + \int_{2T_s}^{3T_s} (4a)^2 dt = \\ &= a^2 \{ [9t]_0^{T_s} + [25t]_{T_s}^{2T_s} + [16t]_{2T_s}^{3T_s} \} = \\ &= a^2 (9T_s + 25T_s + 16T_s) = 50a^2 T_s. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_2^2(t) dt = \int_0^{3T_s} (-a)^2 dt = a^2 [t]_0^{3T_s} = 3a^2 T_s.$$

Следовательно, нормировочный коэффициент равен

$$\frac{1}{3T_s} [(50a^2 T_s)(3a^2 T_s)]^{1/2} = \frac{1}{3T_s} 150^{1/2} a^2 T_s,$$

и нормированное выражение для  $r_{12}(-\tau)$  приводится к такому виду:

$$\begin{aligned} r_{12}^N(-\tau) &= \frac{3\tau - 12T_s}{150^{1/2} T_s} = \frac{3\tau}{12, 25T_s} - \frac{12}{12, 25} \\ r_{12}^N(-\tau) &= 0, 245 \times 10^6 \tau - 0, 98. \end{aligned}$$

При  $\tau = 0$

$$r_{12}^N(0) = -0, 98.$$

При  $\tau = 1$  мкс (наибольшее разрешенное значение)

$$r_{12}^N(10^{-6}) = -0, 735.$$

Следовательно, в рассматриваемом диапазоне  $|r_{12}^N(-\tau)| > |0, 5|$ , что согласуется с критерием хорошего контроля за положением космического аппарата.

---

**Пример 5.13**

Для определения расстояния до источника звука требуется гидроакустический комплекс. Источник широкополосный и гауссов с нулевым средним. Система состоит из двух гидроакустических преобразователей (датчиков), разнесенных на расстояние  $d$ , и соответствующей системы обработки сигналов. Датчики  $T_1$  и  $T_1$  принимают широкополосные шумы  $q_1(t)$  и  $q_2(t) = Aq_1(t + \Delta t)$  соответственно,  $\Delta t$  — временная задержка, порожденная разным расстоянием от датчиков до источника,  $A$  — соответствующий коэффициент затухания (в данном случае предполагается, что  $A = 1$ ). Система обработки сигналов вычисляет корреляционную функцию выходов двух датчиков, имеющих равные длины.

Изобразите и соответствующим образом подпишите блок-схему простой системы, разработанной для получения корреляции в кратчайшие возможные сроки, и объясните принципы, на которых он основан.

Изобразите выходные сигналы датчиков и их функцию взаимной корреляции, отметив важные особенности.

Если максимальное значение функции взаимной корреляции равно 10, а ширина полосы приемника — 1–10 Гц, чему равна принятая энергия?

**Решение**

Блок-схема системы изображена на рис. 5.35. Данная система ускоряет вычисление корреляции путем использования теоремы о корреляции и расчета соответствующих БПФ. Такая реализация будет быстрее прямого расчета корреляции, если число точек данных в последовательностях превышает 128. Таким образом, система вычисляет  $r_{12}(\tau)$ , которое выражается так:

$$r_{12}(j) = F_D^{-1}[F_1(k)F_2^*(k)].$$

Выход системы  $r_{12}(j)$  равен

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q_1(n)Aq_1(n + \Delta n + j).$$

Поскольку  $q_1(n)$  и  $q_2(n)$  случайные, система даст существенный выход только тогда, когда сигналы так смещены, что идут почти в фазе. Это происходит при  $j = -\Delta n$ . В этом случае выход системы равен

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q_1^2(n) = p_{AV}, \quad \text{средней мощности}$$

Сигналы и их функция взаимной корреляции изображены на рис. 5.36 и 5.37.

Взаимная корреляция двух сигналов равна

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q_1(t)q_2(t + \tau)dt.$$

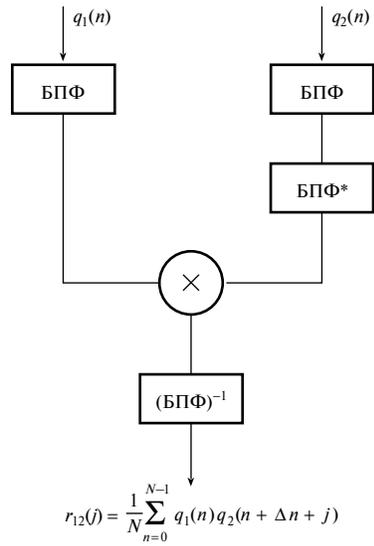
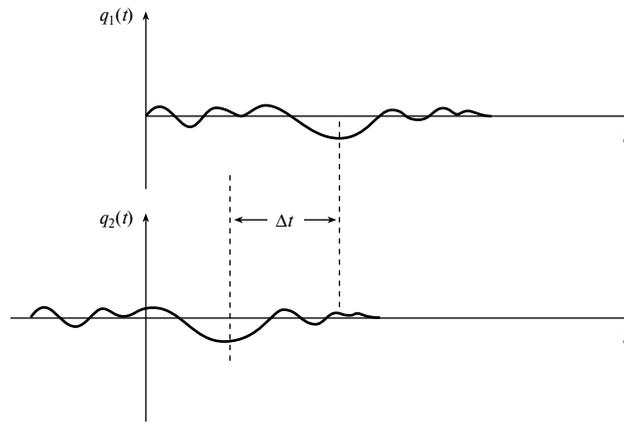


Рис. 5.35. Блок-схема гидроакустического комплекса



$\Delta t$  – задержка во времени между двумя датчиками

Рис. 5.36. Широкополосный шум, детектируемый гидроакустической системой

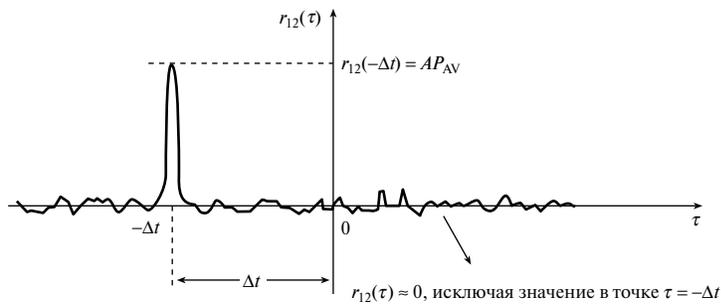


Рис. 5.37. Функция взаимной корреляции сигналов, детектируемых гидроакустической системой

Подставляя выражение для  $q_2(t)$ , получаем

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q_1(t) A q_1(t + \Delta t + \tau) dt,$$

что можно записать следующим образом:

$$r_{12}(\tau) = \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q_1(t) q_1(t + \tau') dt, \quad \text{где } \tau' = \Delta t + \tau.$$

Видно, что подынтегральное выражение эквивалентно по величине автокорреляционной функции  $q_1(t)$  при нулевой задержке и, следовательно, представляет мощность этого сигнала  $P_{AV}$ . Значит,

$$r_{12}(\tau) = AP_{AV} \delta(t + \Delta t),$$

где  $\delta$  представляет дельта-функцию. Видно, что амплитуда  $r_{12}(\tau)$  равна  $AP_{AV}$ . Следовательно,  $AP_{AV} = 10$ .

Принятую энергию в требуемой полосе можно получить, применив вначале для получения спектральной плотности энергии теорему Винера–Хинчина (Wiener–Khinchine). Теорема формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} G_E(f) &= F_D[r_{12}(\tau)] = \\ &= F_D[AP_{AV} \delta(t + \Delta t)] = AP_{AV} e^{i\omega \Delta t}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $|G_E(f)| = AP_{AV} = 10$  Дж Гц<sup>-1</sup>. Ширина полосы сигнала равна  $10 - 1 = 9$  (Гц). Значит, принята энергия  $10 \times 9 = 90$  (Дж).

## 5.5.2. Свертка

### 5.5.2.1. БИХ- и КИХ-фильтры

Работа трансверсальных фильтров (КИХ- и БИХ-) является хорошим практическим примером свертки [5, 13]. Эти фильтры можно спроектировать так, чтобы они выполняли свертку последовательностей или более общую цифровую фильтрацию, например, двумерную фильтрацию, используемую в сфере обработки изображений [6] с целью подавления шума, очистки изображений и распознавания шаблонов.

Рассмотрим линейную независимую от времени систему, которую можно описать следующим образом:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^L b_k x(n-k), \quad (5.126)$$

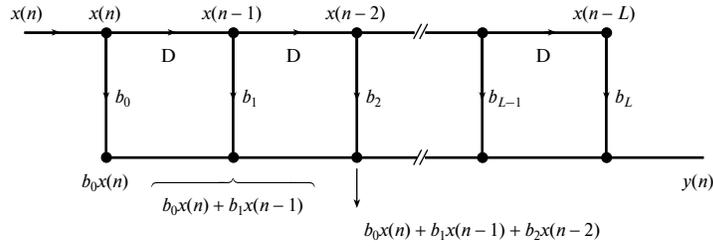


Рис. 5.38. Представление нерекурсивного фильтра в диаграммной форме

где  $y(n)$  представляет выходную, а  $x(n)$  — входную последовательность. Видно, что выход зависит от текущего входа, а также от предыдущих входов и выходов. В приведенном соотношении  $a_k$  и  $b_k$  — действительные константы,  $N$  — порядок уравнения, который указывает, какое число предыдущих выходов нужно рассматривать.

Поскольку текущий выход зависит от предыдущих выходов, система рекурсивна. Если выход системы зависит только от предыдущих входов, говорят, что система нерекурсивна, и ее можно описать следующим образом:

$$y(n) = \sum_{k=0}^L b_k x(n-k) \quad (5.127)$$

(данное уравнение описывает трансверсальный фильтр, или линию задержки с отводами).

На рис. 5.38 показано описание системы, определяемой уравнением (5.127), в форме диаграммы. Члены суммы, представляющие выход системы, получаются путем суммирования задержанных и взвешенных значений входов. Предположим, что вход  $x(n)$  — это единичный импульс  $\delta(n)$ , где

$$x(n) = \delta(n) \begin{cases} 1, & n = 0, & \text{т.е. } x(0) = 1 \\ 0, & n \neq 0, & \text{т.е. } x(n \neq 0) = 0 \end{cases} .$$

Соответствующий выход — импульсная характеристика  $h(n)$ . Подставляя последовательные входные значения в уравнение (5.127), получаем

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0) = b_0 x(0) + b_1 \times 0 = b_0 \times 1 = b_0, \\ y(1) &= h(1) = b_0 \times 0 + b_1 x(0) + b_2 \times 0 = b_1 \times 1 = b_1, \\ &\vdots \\ y(L) &= h(L) = b_0 \times 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + b_L \times 1 = b_L. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$h(n) = \{b_0, b_1, \dots, b_L\}, \quad (5.128)$$

откуда видно, что весовые коэффициенты на диаграмме системы соответствуют коэффициентам ее импульсной характеристики. Подобные системы называются *фильтрами с конечной импульсной характеристикой* (КИХ-фильтрами).

Рассмотрим теперь выход, соответствующий входной последовательности общего вида  $x(n)$ . Подставляя последовательные значения в уравнение (5.127), получаем

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_nx(0) \equiv \\ &\equiv h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(n)x(0), \end{aligned} \quad (5.129)$$

что, как и следовало ожидать, можно записать как свертку входа с выходом. Следовательно, КИХ-фильтры можно также рассматривать как конволюеры (устройства выполнения свертки), в которых весовые коэффициенты соответствуют коэффициентам их импульсной характеристики.

Аналогичное соотношение существует и для БИХ-фильтров. Рассмотрим рекурсивный фильтр первого порядка, описываемый уравнением

$$y(n) = a_1y(n-1) + b_0x(n). \quad (5.130)$$

Легко показать, что для единичного импульса на входе

$$y(n) = h(n) = b_0a_1^n, \quad n \geq 0. \quad (5.131)$$

Для произвольной входной последовательности  $x(n)$ , предполагая, что  $y(-1) = 0$ , можно записать

$$\begin{aligned} y(0) &= b_0x(0), \\ y(1) &= a_1b_0x(0) + b_0x(1), \\ y(2) &= a_1^2b_0x(0) + a_1b_0x(1) + b_0x(2), \\ &\vdots \\ y(n) &= a_1^n b_0x(0) + a_1^{n-1} b_0x(1) + \dots + a_1 b_0x(n-1) + b_0x(n). \end{aligned}$$

Подставляя известные значения весовых коэффициентов из уравнения (5.131), получаем

$$y(n) = h(n)x(0) + h(n-1)x(1) + \dots + h(0)x(n). \quad (5.132)$$

Из уравнений (5.131) и (5.132) следует, что БИХ-фильтр, соответствующий системе первого порядка, — это конволюер, коэффициенты импульсной характеристики которого равны  $h(n) = b_0a_1^n$ .

КИХ-фильтры используют в обработке речи, для получения кодов РСМ со сниженной шириной полосы, в субполосных кодерах, для параметрического спектрального анализа и в вокодерах с линейным предсказанием [6].

### 5.5.2.2. Сверточное кодирование

Сверточные коды позволяют исправлять пакеты ошибок путем введения в код цифр контроля четности [13, 15]. Выходы триггеров регистра сдвига обеспечивают задержки и подаются в отводы, после чего соответствующим образом объединяются с использованием сумматоров по модулю 2. В результате получается несколько выходов, которые последовательно считываются в каждом такте (рис. 5.39). Система является причинной и нерекурсивной, производит выход, который зависит от ее предыдущих входов, и сворачивает новые входные данные со своей импульсной характеристикой.

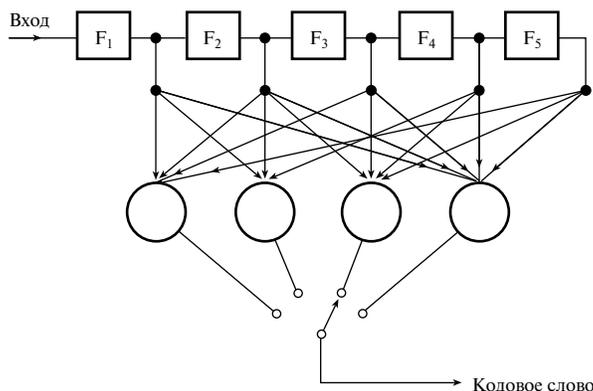


Рис. 5.39. Сверточный кодер

### 5.5.2.3. Обращение свертки

Вход всех систем сворачивается с импульсной характеристикой системы и может искажать выход. Это происходит, например, в системах телекоммуникаций и может принуждать использовать эквалайзер — линейный фильтр, который по выходу восстанавливает исходный сигнал. Перед тем как разрабатывать подобный фильтр, необходимо определить импульсную характеристику системы (*идентифицировать систему*). Тема идентификации системы подробно рассмотрена в работе [11].

### 5.5.2.4. Речь

Тема анализа и кодирования речи в сферах взаимодействия человека с машиной и сжатия данных довольно интересна. Иногда при этом используется тот факт, что речевой сигнал можно смоделировать как свертку серии импульсов, представляющих основные тоны, активирующих импульсов и импульсной характеристики речевого тракта [12]. Получающуюся тройную свертку можно легко обратить в форму, подходящую для линейной независимой от времени системы. Более подробно использование КИХ-фильтров в сфере обработки речи освещено в разделе 5.5.2.1.

## 5.6. Резюме

В данной главе подробно рассмотрены темы корреляции и свертки, а также их взаимосвязь. В рамках темы корреляции изучены процедуры нормировки и подходы, позволяющие избежать краевых эффектов. Описаны эффекты корреляции зашумленных сигналов и идентификация сигналов в шуме с помощью корреляции. Представлены техники быстрой корреляции и свертки, основанные на теоремах о корреляции и свертке и использовании БПФ, также показано, как получить линейную свертку. Выведены быстрые методы наложения-сложения и наложения-записи, позволяющие получать свертку больших последовательностей данных. Кроме того, описаны средства дальнейшего двукратного ускорения вычисления для действительных данных на основе использования действительной и мнимой частей БПФ.

## Задачи

- 5.1. Две последовательности данных равной длины записаны по периодической серии импульсов, которая передана по зашумленному каналу. Мгновенные значения напряжения приведены в табл. 5.4.
1. Определите величину задержки между двумя записями и период сигнала.
  2. Определите периодический сигнал.

**Таблица 5.4.** Мгновенные значения напряжения (вольт) двух разных записей состояния одного канала

Запись 1	6,02	-5,98	7,92	-7,96	-0,78
Запись 2	8,93	-7,20	-0,82	3,23	1,44
	-8,34	9,22	-2,65	-3,7	9,51
	5,43	-9,88	-1,13	0,79	9,83
	5,53	3,50	-3,18	-8,85	8,21
	-8,73	4,64	-8,49	-4,66	-8,84
	1,69	-0,06	6,65	-8,00	-9,21
	5,55	-8,24	-0,37	2,71	4,63
	-0,78	7,27	-5,98	-3,97	9,11
	1,88	-0,92	-5,33	9,01	9,23
	4,23	2,99	-1,85	-5,27	3,81
	-3,7	5,08	-0,72	-5,08	-2,6
	6,62	-2,64	2,08	-5,91	-3,58
	9,67	-8,55	-3,08	4,18	8,11
	-1,65	3,64	-8,19	-3,50	4,84
	0,74	-3,87	-4,09	8,03	6,91
	7,25	2,93	-4,42	-8,21	3,61
	-9,87	-3,62	-8,29	-5,8	-7,04

- 5.2. Определите функции взаимной корреляции записей 1 и 2 (табл. 5.4) с учетом и без учета краевого эффекта. Оцените ошибки, возникшие вследствие краевого эффекта.
- 5.3. Чему равна корреляция (в процентах) между записями 1 и 2 (табл. 5.4) при нулевой задержке? Корреляция в процентах определяется как коэффициент корреляции, умноженный на 100%.
- 5.4. В табл. 5.5 представлены зашумленные значения напряжения. Используя метод взаимной корреляции с шаблонным сигналом, определите точную форму присутствующего периодического сигнала. Проверьте результат с помощью другого метода.

**Таблица 5.5.** Значения напряжения для зашумленного сигнала

-7,37;	-7,99;	3,31;	-8,59;	-1,68;	3,01;	12,21;	-2,38;	7,46;
-9,84;	1,48;	1,1;	-1,8;	5,48;	8,93;	0;	-9,36;	-10,11;
1,61;	3,36;	-4,86;	6,27					

- 5.5. Рассчитайте автокорреляционную функцию периодического сигнала из примера 5.4 а) численно, б) аналитически. Сравните решения между собой и с автокорреляционной функцией зашумленного сигнала. Объясните отличия от предполагаемых результатов.
- 5.6. Цифровой сигнал выбирается и дискретизируется. Оцифрованные значения напряжения представлены в табл. 5.6. Определите, можно ли считать сигнал случайным. Предполагая, что интервал дискретизации равен 1 мс, и присутствует периодический компонент с периодом 4 мс, оцените и изобразите периодический сигнал.

**Таблица 5.6.** Оцифрованные значения напряжения

0,92;	-3,71;	3,11;	-0,24;	4,65;	0,84;	-2,98;	-3,94;	-4,03;	-2,51;	0,17;
3,85;	2,58;	0,38;	4,58;	3,4;	-3,46					

- 5.7. Сравните отношения сигнал-шум в следующих случаях:
- 1) зашумленный периодический сигнал — запись 1 в табл. 5.4;
  - 2) автокорреляционная функция записи 1 в табл. 5.4;
  - 3) функция взаимной корреляции записей 1 и 2 в табл. 5.4.
- 5.8. Рассчитайте теоретические отношения сигнал-шум в представленных ниже задачах.
1. Периодический сигнал, полученный по данным записи 1 в табл. 5.4 путем нахождения взаимной корреляции с подходящей серией импульсов.
  2. Автокорреляционная функция записи 1 в табл. 5.4, при условии, что, во-первых, отношение сигнал-шум  $(S/N)_{r0}$  автокорреляционной функции зашумленного синусоидального сигнала выражается так:

$$(S/N)_{r0} = \frac{N}{1 + 8/\left(\frac{S_i}{N_i}\right) + 2/\left(\frac{S_i}{N_i}\right)^2},$$

где  $N$  — число данных,  $S_i$  — мощность сигнала,  $N_i$  — мощность шума, и что, во-вторых, отношение сигнал-шум  $(S/N)_\delta$  взаимной корреляции зашумленного синусоидального сигнала с серией импульсов, имеющей такой же период, что и сигнал, равно

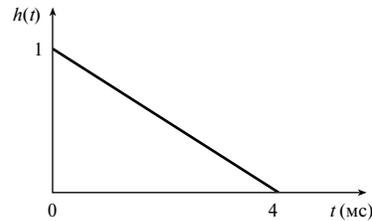
$$(S/N)_\delta = \frac{N}{1 + 1/\left(\frac{S_i}{N_i}\right)}.$$

- 5.9. Сравните результаты, полученные при решении задач 5.7 и 5.8.
- 5.10. Согласованный фильтр, используемый для детектирования поступления на приемник из зашумленного канала соответствующего сигнала, имеет импульсную характеристику  $\{1, -1, -1, 1, 1, -1, 1\}$ . В табл. 5.7 приведены значения выборок сигнала, представляющие элементы серии биполярных импульсов с амплитудами  $\pm 1,5$  В и шириной 1 мкс. Определите время поступления сигнала и значение константы согласованного фильтра.

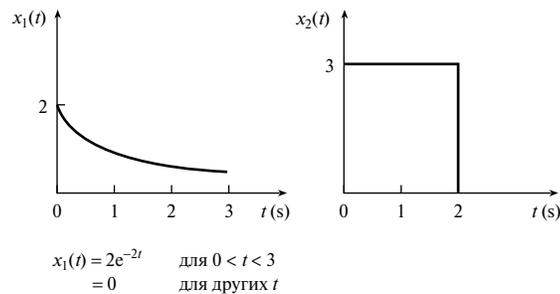
**Таблица 5.7.** Мгновенные значения напряжения зашумленного биполярного сигнала

$t$ (мкс)	0	1	2	3	4	5	6
Напряжение	0,14	0,48	1,61	2,09	-2,40	0,40	2,35
$t$ (мкс)	7	8	9	10	11	12	13
Напряжение	-0,59	-1,81	0,32	-0,47	1,81	-1,63	-2,28

- 5.11. Найдите импульсную характеристику системы, если ее отклик на псевдослучайную последовательность  $\{1; 1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; -1\}$  равен  $y(n) = \{0; 0; 0; 5; 1; 5; 1; 5; 1; 5; 1; -1; -1; -1; -1, 5; -0, 5; -0, 5; -0, 5\}$ .
- 5.12. Импульс единичной амплитуды подается в цепь, импульсная характеристика которой изображена на рис. 5.40. Численно определите выходной сигнал. Сигналы дискретизируйте с интервалом 0,5 мс.

**Рис. 5.40.** Импульсная характеристика системы (задача 5.12)

- 5.13. 1. На рис. 5.41 показаны две функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Оцените следующие величины:
- их свертку  $x_3(t)$  численно, взяв дискретные значения в моменты времени  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  с;
  - их свертку  $x_3(t)$  аналитически.
2. Изобразите функции  $x_3(t)$  и объясните, почему они отличаются.

**Рис. 5.41.** Функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  (задача 5.13)

- 5.14. Определите форму выходного импульса, если на вход однокаскадного RC-фильтра нижних частот с частотой среза 6 МГц подается прямоугольный им-

пульс с амплитудой 5 В и шириной 0,4 мкс. Предполагается, что импульсная характеристика фильтра выражается следующим образом:

$$h(t) = \frac{1}{CR} e^{-t/CR} u(t).$$

- 5.15. Прямоугольный импульс с высотой 5 В и шириной 1,0 мкс подается на вход системы с характеристикой  $h(t)$ :

$$h(t) = 0,1[1 - e^{-t/(1,09 \times 10^{-6})}] \quad 0 \leq t \leq 10 \text{ мкс}$$

$$= 0 \quad 10 \text{ мкс} < t < \infty$$

Определите выход системы:

- аналитически;
- путем дискретизации  $h(t)$  с интервалом 1 мкс и представления импульса импульсной функцией, расположенной в точке  $t = 0$  с.

Критически сравните полученные результаты.

- 5.16. Найдите функцию взаимной корреляции двух наборов данных  $\{1, 5; 2, 0; 1, 5; 2, 0; 2, 5\}$  и  $\{0; 0, 33; 0, 67; 1, 0\}$
- прямым расчетом взаимной корреляции;
  - применяя теорему о корреляции.
- 5.17. Определите выход электрической системы с импульсной характеристикой  $\{0; 0, 899; 0, 990; 0, 991; 1\}$  при подаче на вход сигнала  $\{0; 2, 5; 5, 0; 0\}$  (вольт)
- прямым расчетом свертки;
  - применяя теорему о свертке.
- 5.18. Используйте метод наложения-сложения для расчета выхода системы с импульсной характеристикой  $h(n) = \{0; 0, 899; 0, 990; 1\}$  с входными данными, приведенными в табл. 5.5 (последние два элемента данных игнорируйте). Предполагайте, что данные дискретизируются с интервалом 2,5 мкс, и разделите входные данные на пять сегментов равной длины. Рассчитайте сдвиг фаз между выходом и входом системы. Ответ проверьте, используя метод прямой свертки.
- 5.19. Решите задачу 5.18, используя метод наложения-сложения, в котором свертка вычисляется с использованием теоремы о свертке. Сравните результат с ответом задачи 5.18.
- 5.20. Найдите выход системы, описанной в задаче 5.18, имеющей импульсную характеристику  $h(n) = \{0; 0, 899; 0, 990; 0, 999; 1\}$ , используя метод наложения-записи и входные данные, приведенные в табл. 5.5 (последние два элемента данных игнорируйте). Результат сравните с ответом задачи 5.18.
- 5.21. Решите задачу 5.20, применяя для расчета свертки теорему о свертке. Сравните результат с ответами задач 5.18–5.20.
- 5.22. Используйте решения задач 5.18–5.21 для сравнения объемов вычислений, необходимых в различных схемах, включая расчет с помощью прямой свертки.

- 5.23. Напишите программу расчета свертки методом наложения-сложения. Используйте ее для проверки ответа задачи 5.18, а также нахождения выходов различных систем с входами по вашему выбору.
- 5.24. 1. Напишите программу расчета быстрой корреляции и используйте ее для расчета быстрой корреляции записей 1 и 2 в табл. 5.4.
2. Исследуйте функции взаимной автокорреляции и автокорреляции некоторых сигналов, таких как меандры, синусоиды, случайный шум и сигналы с различными отношениями сигнал-шум.
3. Сравните относительные возможности методов расчета корреляции и оценки спектра в сфере детектирования сигналов в шуме.

### Задачи для решения с помощью MATLAB

- 5.25. Даны последовательные выборки двух дискретных сигналов:

$$x = 4, 2, -1, 3, -2, -6, -5, 4, 5,$$

$$y = -4, 1, 3, 7, 4, -2, -8, -2, 1.$$

- Используя MATLAB, оцените нормированную и денормированную автокорреляционную функцию каждой последовательности данных.
  - Вычислите и изобразите оценки смещенной и несмещенной автокорреляционной функции обеих последовательностей.
  - Вычислите и изобразите оценки нормированной и денормированной функции взаимной корреляции двух последовательностей.
  - Вычислите и изобразите оценку смещенной и несмещенной функции взаимной корреляции двух последовательностей.
  - Оцените автокорреляционную функцию или функцию взаимной корреляции (исходя из условия) при нулевой задержке для п. 1–4.
  - Определите длину функции взаимной корреляции или автокорреляционной функции (исходя из условия) для п. 1–4.
  - Сравните результаты п. 1–6 и прокомментируйте отличия.
- 5.26. Сравните нормированные функции взаимной корреляции последовательностей  $x$ ,  $y$  и последовательностей  $y$ ,  $x$  из задачи 5.25.
- 5.27. 1. Сгенерируйте 1000-точечную последовательность данных со свойствами случайного белого гауссова шума (используя функцию `randn`).
2. Рассчитайте и изобразите оценки автокорреляционной функции последовательности из п. 1 для первых 30 задержек.
- 5.28. Непрерывный сигнал характеризуется следующим уравнением:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t).$$

1. Сгенерируйте с помощью MATLAB дискретный эквивалент сигнала. Частота дискретизации равна 1 кГц,  $f_1 = 50$  Гц,  $f_2 = 100$  Гц, а отношение амплитуд частотных компонентов  $A/B = 1,5$ .
  2. Вычислите и изобразите автокорреляционную функцию последовательности, полученной в п. 1.
- 5.29.
1. С помощью соответствующих функций MATLAB сгенерируйте и изобразите графики следующих сигналов:
    - а) синусоида — используйте  $\sin(2\pi t/100)$  при  $t=0:1:1000$ ;
    - б) зашумленный сигнал — используйте функцию `randn`;
    - в) зашумленный синусоидальный сигнал — сложите сигналы, полученные в п. 1, а и б;
    - г) прямоугольный сигнал — используйте  $\text{square}(2\pi t/100)$ .
  2. Рассчитайте и изобразите нормированную автокорреляционную функцию всех сигналов, фигурирующих в п. 1.
  3. Кратко опишите общие и уникальные свойства автокорреляционных функций, вычисленных в п. 2.
- 5.30. Ниже моделируется задача оценки расстояния до объектов с помощью корреляции. Взаимная корреляция переданного сигнала и зашумленного отраженного сигнала должна иметь максимум при задержке, соответствующей удвоенному искомому расстоянию.
1. С помощью подходящих функций MATLAB сгенерируйте сигналы, изображенные на рис. 1.3, а и б (верхний и нижний следы представляют соответственно переданный и полученный сигналы).
  2. Вычислите функцию взаимной корреляции двух сигналов, оценив таким образом расстояния от передатчика до объекта.
- Предполагается, что радиоволны распространяются со скоростью  $3 \times 10^8$  м/с, а частота дискретизации равна 4 МГц.
- 5.31. Решите задачу 5.25, используя функцию `xcov`. Прокомментируйте отличия результатов.

## Литература

1. Beauchamp K. G. (1973) *Signal Processing Using Analog and Digital Techniques*. London: Allen and Unwin.
2. Bell A. J. and Sejnowski T. J. (1995) An information-maximisation approach to blind separation and blind deconvolution. *Neural Computation*, 7, 1129–1159.
3. Brigham E. O. (1974) *The Fast Fourier Transform*, Sections 13.3 and 13.4. Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall.
4. Chatfield C. (1980) *The Analysis of Time Series*, p. 62. London: Chapman and Hall.
5. DeFatta D. J., Lucas J. G. and Hodgkiss W. S. (1988) *Digital Signal Processing: A System Design Approach*, Section 6.9, p. 306. New York: Wiley.

6. Grant P. M., Cowan C. F. N., Mulgrew B. and Dripps J. H. (1989) *Analogue and Digital Signal Processing and Coding*, Chapters 16, 17, 19 and 20. Bromley, UK: Chartwell-Bratt.
7. Jenkins G. M. and Watts D.G. (1968) *Spectral Analysis and its Applications*. San Francisco CA: Holden-Day.
8. Jervis B. W., Goude A., Thomlinson M., Mir S. and Miller G. (1990) Least squares artefact removal by transputer. In *IEE Colloquium on the Transputer and Signal Processing*, Savoy Place, London, 5 March 1990.
9. Main G. and Howell T. D. (1993) Determining a signal to noise ratio for an arbitrary data sequence by a time domain analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, **29**(6), November, 3999–4001.
10. McGillem C. D. and Cooper G. R. (1974) *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.
11. Proakis J. G. and Manolakis D. G. (1988) *Introduction to Digital Signal Processing*, p. 429. Basingstoke: Macmillan.
12. Rabiner L. R. and Gold B. (1975) *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Chapters 12 and 13. Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall.
13. Stremmer F. G. (1982) *Introduction to Communication Systems*, 2nd edn, Section 3.10 and p. 407. Reading MA: Addison-Wesley.
14. Strum R. D. and Kirk D. E. (1988) *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Chapter 3. Reading MA: Addison-Wesley.
15. Taub H. and Schilling D. L. (1986) *Principles of Communication Systems*, 2nd edn, p. 562. New York: McGraw-Hill.

## Приложение

### 5.A. Программа на языке C для расчета взаимной корреляции и автокорреляции

Программа на языке C для расчета взаимной корреляции и автокорреляции последовательностей данных приводится на компакт-диске к книге [Ifeachor, 2001] (подробности см. в предисловии).