ГЛАВА 1

Исследование операций: что это такое

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Первые формальные разработки по исследованию операций (ИО) были инициированы в Англии во время Второй мировой войны, когда команда британских ученых сформулировала и нашла решение задачи наиболее эффективной доставки военного снаряжения на фронт. После окончания войны эти идеи были перенесены в гражданскую сферу для повышения эффективности и продуктивности экономической и производственной деятельности. Сегодня теория исследования операций является основным и неотъемлемым инструментом при принятии решений в самых разнообразных областях человеческой деятельности.

В этой главе вы познакомитесь с основной терминологией ИО, включая аспекты математического моделирования, проверки допустимости решений, оптимизации и итеративных алгоритмов вычислений. Краеугольным камнем исследования операций является математическое моделирование. Это самый важный (и самый трудный) этап в практическом применении методов ИО. И хотя данные, полученные в процессе исследования математических моделей, являются основой для принятия решений, окончательный выбор обычно делается с учетом многих других "нематериальных" (не имеющих числового выражения) факторов (таких как человеческое поведение), которые невозможно отобразить в математических моделях.

1.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

В качестве вводного примера рассмотрим *задачу заказа билетов*. Предположим, что по работе вам необходимо в течение пяти недель пять раз посетить город B (а живете вы в городе A, расположенном достаточно далеко от города B). Каждую неделю, по понедельникам, выполняется авиарейс из города A в город B, а обратный рейс выполняется каждую среду. Вы должны быть в городе B в понедельник первой недели и окончательно возвратиться в город A в среду пятой недели. Билет в обе стороны (т.е. из города A в город B и обратно) стоит 400 долл., однако вы можете получить 20% скидки от стоимости билетов, если обратный вылет состоится после выходных в любую из последующих недель. Кроме того, следует учесть, что стоимость билета только в одну сторону (из A в B или из B в A — безразлично) равна 75% от стоимости полного билета "туда и обратно". Вы, естественно, хотите минимизировать стоимость перелетов. Как это сделать?

Данную ситуацию можно рассматривать как задачу принятия решений, где для поиска оптимального решения требуется определить три основных компонента.

1. Что в данном случае считать **альтернативными** решениями?
2. Каким **ограничениям** должно удовлетворять возможное решение?
3. По какому **критерию** должны отбираться альтернативные решения?

В целом в нашей задаче возможны следующие альтернативы.

1. Покупка пяти полных билетов *A-B-A* (т.е. из города *A* в город *B* и обратно) — каждый на одну из пяти недель.
2. Покупка одного билета в одну сторону *A-B* на понедельник первой недели, четырех билетов *B-A-B*, захватывающих выходные, для последующих перелетов "туда-обратно" и одного "обратного" билета *B-A* с вылетом в среду последней, пятой недели.
3. Покупка билета *A-B-A* с вылетом в город *B* в понедельник первой недели и возвращением в *A* в среду последней, пятой недели и покупка четырех билетов *B-A-B* для всех остальных перелетов.

Ограничениями в данной задаче являются дни отправления и прибытия на каждой неделе: в понедельник вылет из *A*, в среду — возвращение из *B*.

Очевидным естественным критерием для оценки возможных альтернатив является суммарная цена билетов. Альтернатива, обеспечивающая наименьшую стоимость билетов, будет наилучшей. В данном случае имеем следующие варианты.

1. *Альтернатива 1*: стоимость билетов = $5 \times 400 = 2000$ долл.
2. *Альтернатива 2*: стоимость билетов = $= 0{,}75 \times 400 + 4 \times 0{,}8 \times 400 + 0{,}75 \times 400 = 1800$ долл.
3. *Альтернатива 3*: стоимость билетов = $5 \times (0{,}8 \times 400) = \mathbf{1600}$ долл.

Очевидно, что наилучшим является третий вариант.

Приведенный выше пример иллюстрирует все основные принципиальные составляющие модели исследования операций (ИО) — альтернативы, ограничения и критерий отбора альтернатив. Но в различных ситуациях эти составляющие могут весьма отличаться от аналогичных составляющих других моделей. Чтобы показать это, рассмотрим следующую задачу — *задачу разбивки огорода*. Итак, хозяин дома собрался разбить у себя на заднем дворе огород, который должен иметь прямоугольную форму, что упростит ему организацию полива в междурядьях. Огород должен быть обнесен забором, общая длина которого должна быть равна 100 м. Задача заключается в том, чтобы получить огород максимально возможной площади среди тех, суммарная длина ограждения которых равна указанной величине. Какую длину и ширину будет иметь такой прямоугольный огород?

В отличие от предыдущего примера здесь количество альтернатив бесконечно, поскольку *длина* и *ширина* прямоугольника теоретически могут принимать бесконечное множество значений (но из конечного интервала). Чтобы это свойство задачи выразить формально, определим возможные альтернативы, задав *непрерывные переменные*, соответствующие длине и ширине прямоугольника. Поскольку эти переменные непрерывны, невозможно найти решение простым перечислением возможных альтернатив. Значит, необходимо получить математические выражения, представляющие поведение этих переменных и учитывающих известные нам ограничения.

Итак, обозначим через l длину огорода, а через w — его ширину. Основываясь на этих обозначениях, ограничения задачи можно сформулировать следующим образом.

1. Ширина огорода + длина огорода = половина его периметра, т.е. полной длины забора L.
2. Ширина и длина огорода не могут быть отрицательными.

Алгебраически эти ограничения можно записать так.

1. $2(l + w) = L$.
2. $l \geq 0$, $w \geq 0$.

Теперь осталось не забыть о цели нашей задачи — максимизировать площадь прямоугольника. Обозначив площадь прямоугольника через z, окончательную математическую модель можно записать следующим образом.

$$\text{Максимизировать } z = lw$$

при ограничениях

$$2(l + w) = L,$$

$$l, w \geq 0.$$

Оптимальным решением данной задачи будет $w = l = L/4$, т.е. среди прямоугольников с фиксированным периметром максимальную площадь будет иметь квадрат.

В действительности эту модель можно дополнительно упростить, исключив одну из переменных в целевой функции. Вот как это может выглядеть.

$$w = L/2 - l$$

В результате имеем:

$$z = wl = (L/2 - l)l = Ll/2 - l^2$$

Максимум для переменной z определяется с помощью дифференциальных вычислений, речь о которых пойдет в главе 20. Выполнив нужные расчеты, выясняем, что это максимальное значение для $l = L/4 = 25$ м. Подставив это значение в формулы ограничений, вы убедитесь, что оно полностью удовлетворяет всем условиям задачи. Следовательно, оптимальный вариант — разбивка огорода квадратной формы.

Два приведенных примера демонстрируют различия моделей ИО. В общем случае первым шагом в построении таких моделей является определение **альтернатив**, или **переменных решения**. Далее переменные решения используются для создания **целевой функции** и **ограничений** модели. Законченную типичную математическую модель ИО схематически можно представить следующим образом.

Максимизация или минимизация **целевой функции**
при условии выполнения **ограничений**.

Решение задачи называется **допустимым**, если оно удовлетворяет всем ограничениям модели. Решение будет **оптимальным**, если, кроме того, что оно допустимо, целевая функция при этом решении достигает оптимального (максимального или минимального) значения. В примере с билетами задача имела три допустимых варианта и оптимальное решение предоставляла третья альтернатива. В примере с прямоугольником допустимое решение должно удовлетворять условию $l + w = L/2$ с неотрицательными значениями l и w. Это приводит к бесконечному множеству допустимых решений, поэтому здесь, в отличие от примера с билетами, для поиска оптимального решения необходимо привлекать соответствующие математические средства (в данном случае — средства дифференциального исчисления).

В моделях ИО понятие *оптимальности* решений определяется с учетом соответствия этого решения множеству ограничений. Это означает, что качество окончательного выбора, сделанного на основе решения задачи, зависит от адекватности представления моделью реальной ситуации, которую она формально описывает посредством ограничений. Например, если в примере с билетами нам не были бы известны все варианты покупки билетов (точнее, скидки на билеты), то, скорее всего, оптимальным было бы другое решение. Если исключить из модели третью альтернативу, тогда “оптимальным” решением будет второй вариант, при котором следует заплатить за билеты 1800 долл. Такое решение будет **условно оптимальным** (или **локально оптимальным**) для реальной ситуации. Таким образом, конкретное оптимальное решение является наилучшим только для *этой* модели. Чем модель лучше отображает реальную ситуацию, тем ближе решение этой задачи к оптимальному.

1.3. РЕШЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ[1]

В исследовании операций нет единого общего метода решения всех математических моделей, которые встречаются на практике. Вместо этого выбор метода решения диктуют тип и сложность исследуемой математической модели. Например, в разделе 1.2 для решения задачи о билетах необходимо просто ранжировать альтернативы по стоимости билетов, тогда как для решения задачи о максимальной площади прямоугольника необходимо применять средства дифференциального исчисления.

Наиболее известными и эффективными методами ИО являются методы **линейного программирования**, когда целевая функция и все ограничения являются линейными функциями. Для решения математических моделей других типов предназначены методы **целочисленного программирования** (если все переменные должны принимать только целочисленные значения), **динамического программирования** (где исходную задачу можно разбить на меньшие подзадачи), **теории массового обслуживания** (в тех случаях, когда модель задачи может быть представлена в виде сети) и **нелинейного программирования** (когда целевая функция и/или ограничения являются нелинейными функциями). Перечисленные методы составляют только часть из большого количества самых разнообразных доступных методов исследования операций.

Практически все методы ИО не позволяют получить решение в замкнутой (в виде формул) форме. Напротив, они порождают вычислительные **алгоритмы**, которые являются итерационными по своей природе. Это означает, что задача решается **последовательно** (итерационно), когда на каждом шаге (итерации) получаем решения, постепенно сходящиеся к оптимальному. Итерационная природа алгоритмов обычно приводит к объемным однотипным вычислениям. В этом и заключается причина того, что эти алгоритмы разрабатываются, в основном, для реализации с помощью средств вычислительной техники.

Некоторые математические модели могут быть такими сложными, что их невозможно решить никакими доступными методами оптимизации. В этом случае остается только **эвристический** или **метаэврестический подход**: поиск *подходящего* "хорошего" решения вместо *оптимального*. Эвристические подходы предполагают наличие *эмпирических правил*, в соответствии с которыми и ведется поиск подходящего решения.

Интересный факт. Ада Лавлейс — первый в истории программист-алгоритмист

Хотя автором самой концепции и первого в истории алгоритма[2] принято считать создателя алгебры Мухаммада ибн Муса Аль-Хорезми (род. в 780 г. в Хиве, Узбекистан, умер в 850 г. в Багдаде, Ирак), именно Ада Лавлейс, жившая в Британии в 1815–1852 гг., разработала первый алгоритм применительно к компьютерам. В данном случае под компьютером по-

[1] Когда говорят о "решении моделей", то подразумевается "решение задачи, формализованной в виде модели". В англоязычной научной литературе общепринята такая "подмена". Если полистать книги по этой тематике, изданные в последнее время в России, то можно заметить, что подобные выражения приживаются и в русском научном обиходе. Поэтому мы оставили более короткое (и более емкое) выражение "решение моделей" без перевода в корректную, но более длинную (и более размытую в понятийном плане) литературную форму. — *Примеч. ред.*

[2] Считается, что слово "алгоритм" происходит от средневекового латинского термина *algorismus*, представляющего собой искаженную транслитерацию арабского слова "Аль-Хорезми".

нимается механическое устройство, предназначенное для решения дифференциальных задач, разработанное и созданное английским математиком Чарльзом Беббиджем (1791–1871)[3].

Ада Лавлейс всегда интересовалась математикой. Еще подростком она побывала в доме у Беббиджа и была просто очарована его изобретением, способным выполнять не только простейшие арифметические вычисления. Работая вместе в Беббиджем, она перевела на английский статью, в которой описывались подробности изготовления деталей аналитической машины. Эта статья была написана на французском языке на основе цикла лекций Беббиджа, которые он прочитал в Турине, в Италии. К законченному переводу статьи Ада приложила собственные заметки, включавшие, в том числе, и некоторые исправления в отношении конструкционных идей автора машины (интересно, что этим заметкам была суждена жизнь более продолжительная, чем самой статье Беббиджа). В одной из этих заметок подробно описан первый из известных вычислительных алгоритмов, предлагающий способ вычисления чисел Бернулли на еще не законченной на этот момент аналитической машине. Ада предсказывала, что машина Беббиджа вполне сможет манипулировать алгебраическими символами (а не только числами) и даже создавать сложные музыкальные партитуры.

В честь Ады Лавлейс был назван язык программирования — *Ada*, разработанный в конце прошлого века министерством обороны США. Те, кому приходилось бывать на площади Сент-Джеймс в Лондоне, могут вспомнить синюю памятную табличку с надписью "Графиня Ада Лавлейс (1815–1852), пионер вычислительной техники."

1.4. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Теория массового обслуживания (теория очередей) и имитационное моделирование предназначены для изучения и рационального выбора структур систем обслуживания и используемых в них процессов. Они не являются методами оптимизации, но позволяют оценить потенциальную производительность и основные показатели подобных систем, такие как среднее время нахождения в очереди, среднее время ожидания обслуживания, показатели использования сервисов и проч.

В теории массового обслуживания для анализа процессов в системах используются вероятностные характеристики их очередей и стохастические модели, а имитационные модели позволяют оценить показатели производительности реальных систем посредством "имитации" их поведения. Основное различие между теорией массового обслуживания и имитационным моделированием состоит в том, что в первом случае употребляется чисто математический аппарат, а значит, всегда присутствуют конкретные предположения и четкие ограничениях, что ограничивает область применения этого метода. Имитационное же моделирование является намного более гибким методом и может использоваться для проведения анализа практически любых систем массового обслуживания.

В действительности, несмотря на впечатляющие достижения чисто математического моделирования, многие реальные ситуации невозможно адекватно представить с помощью соответствующих математических моделей. Часто в этом "виновата" определенная "жесткость" математики как языка описания и представления событий и явлений. Но даже если существует возможность формализовать рассматриваемую жизненную ситуацию посредством построения математической модели, полученная на ее основе

[3] Из-за нехватки средств Беббиджу за время своей жизни так и не удалось построить полностью функционирующую аналитическую машину. Только в 1991 году работники Лондонского научного музея воплотили его идеи в жизнь, завершив построение дифференциальной машины Engine N2 с использованием тех же самых материалов и технологий, которые были доступны во времена Беббиджа. Интересно, что современные компьютеры построены из тех же самых основных элементов, которые Беббидж придумал для своей машины 150 лет назад, — память, центральный вычислитель, устройства ввода и вывода.

задача оптимизации может быть слишком сложной для современных алгоритмов решения задач этого класса.

На практике именно имитационные модели показали себя как один из лучших способов изучения поведения реальных систем. Различие между математической и имитационной моделями заключается в том, что в последней отношение между "входом" и "выходом" может быть явно не задано. Вместо явного математического описания взаимоотношения между входными и выходными переменными математической модели при имитационном моделировании реальная система разбивается на ряд достаточно малых (в функциональном отношении) элементов или модулей. Затем поведение исходной системы имитируется как поведение совокупности этих элементов, определенным образом связанных (путем установки соответствующих взаимосвязей) в единое целое. Вычислительная реализация такой модели начинается с входного элемента, далее проходит по всем элементам, пока не будет достигнут выходной элемент.

Имитационные модели значительно гибче в представлении реальных систем, чем их математические "конкуренты". Причина такой гибкости заключается в том, что при имитационном моделировании исходная система рассматривается на элементарном уровне, а математические модели стремятся описать системы на глобальном уровне. Однако использование имитационных моделей также не лишено определенных недостатков. За их гибкость приходится платить высокими требованиями к потребляемым временн*ы*м и вычислительным ресурсам. Реализация некоторых имитационных моделей даже на современных сверхбыстрых и высокопроизводительных компьютерах может быть очень медленной.

1.5. ИСКУССТВО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Иллюстративные модели из раздела 1.2 точно отображают реальные ситуации — в том смысле, что здесь модели не являются абстрактными *приближениями* жизненных реалий. Но это скорее редкое исключение в практике исследования операций — подавляющее большинство моделей ИО в той или иной степени являются абстракциями реальной жизни. На рис. 1.1 показаны уровни абстракции, которые характеризуют разработку моделей ИО. Предположения о реальном мире абстрагируются от реального мира путем определения основных (доминантных) переменных, описывающих поведение реальных систем. Фактически модель, являясь абстракцией наших предположений о реальном мире, на языке математических функций описывает поведение не реальных систем, а лишь наших *предположений* об их поведении.

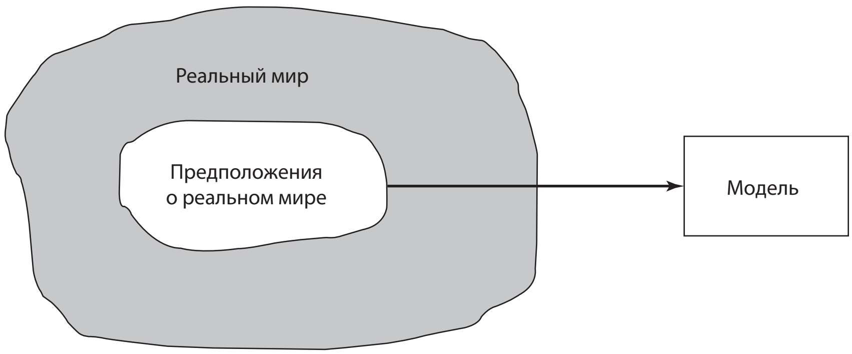

Рис. 1.1. Уровни абстракций при построении моделей

Чтобы показать уровни абстракции в процессе моделирования, рассмотрим пример компании Tyko Manufacturing, производящей пластиковую упаковку. Когда заказ поступает в производственный отдел, необходимое для его выполнения сырье поступает со складов компании или закупается на стороне. Когда партия продукции готова, отдел сбыта берет на себя заботу о распределении и отправке готовой продукции заказчикам.

Анализ ИО деятельности компании должен дать ответ на вопрос о том, каким должен быть оптимальный объем партии изготовляемой продукции. Как можно представить описываемую ситуацию в виде модели?

Эту задачу следует рассматривать в целом как систему, где количество и типы переменных и параметров, описывающих эту систему, будут зависеть от того, со стороны какого подразделения компании мы смотрим на эту ситуацию.

1. *Производственный отдел*: возможности производства описываются в терминах доступных мощностей и трудовых ресурсов, наличия необходимого оборудования (или его стоимости, если оно отсутствует и его необходимо закупить), принятых стандартов качества и т.п.
2. *Подготовительный цех* (отвечает за сырье для производства): здесь переменными и параметрами, описывающими систему, будут доступное количество сырья на складе, сроки поставки новых партий сырья от поставщиков, емкость складских помещений и т.д. Если необходима предварительная обработка сырья, то добавляются новые переменные.
3. *Отдел сбыта*: с точки зрения этого подразделения система описывается прогнозируемыми объемами продаж готовой продукции, емкостью дистрибьюторской сети, эффективностью рекламной кампании, наличием конкурентов.

Каждая из приведенных переменных представляет производство компании Tyko на своем уровне. И, конечно, определение четких функциональных зависимостей между этими переменными является весьма нетривиальной задачей.

Первый уровень абстракции требует определения границ для предположений о реальном мире (см. рис. 1.1). После некоторых размышлений приходим к выводу, что реальную систему приближенно можно представить двумя основными переменными.

1. *Производительность.*
2. *Удельные издержки производства.*

Производительность включает такие показатели, как объем производственных мощностей, стандарты качества и доступное количество сырья. Удельные издержки зависят в основном от показателей, определяемых отделом сбыта. Существенным здесь является то, что упрощение реального мира происходит путем “сваливания в одну кучу” различных показателей, в результате чего появляются относительно простые переменные (показатели) предположений о реальном мире.

Теперь относительно просто на основе предположений о реальном мире построить модель, что будет следующим уровнем абстракции. Через производительность и удельные затраты можно выразить стоимостные и объемные показатели производства конкретной продукции. Абстрактную математическую модель можно построить на основе баланса стоимостных и/или объемных показателей таким образом, чтобы минимизировать, например, себестоимость производства.

1.6. БОЛЬШЕ, ЧЕМ ПРОСТО МАТЕМАТИКА

Поскольку модели ИО имеют математическую природу, существует мнение, что исследование операций является *исключительно* математической дисциплиной. Хотя математические методы действительно являются краеугольным камнем ИО, эта дисциплина не замыкается только на математических моделях (но отметим, что они действительно необходимы, поскольку облегчают и упрощают анализ реальных жизненных ситуаций). Математический аспект исследований операций должен рассматриваться в широком контексте всего процесса принятия решений. Поскольку человеческий фактор присутствует во всех задачах принятия решений, во многих случаях привлечение психологов дает ключ к решению задач. В качестве иллюстрации этого положения рассмотрим несколько примеров.

1. Ставки были очень высоки, когда в 2004 году компания United Parcel Service (UPS) внедрила у себя новое программное обеспечение ORION (его работа была построена на использовании сложного алгоритма — так называемой "задачи коммивояжера", подробно о ней речь пойдет в главе 11). Цель этого нововведения — ежедневное предоставление водителям службы доставки компании наиболее оптимальных маршрутов их движения. В целом такие маршруты были заметно короче тех, которые обычно выбирали сами водители, что предполагало получении экономии порядка нескольких миллионов долларов в год. Водителей же возмутило само утверждение о том, что машина может строить маршруты лучше, чем они сами, с их многолетним опытом. Столкнувшись с такой проблемой, разработчики системы ORION успешно решили ее, просто поместив в маршрутный лист лозунг-призыв "Победи компьютер!", оставив разработанные программой маршруты нетронутыми. Водители с воодушевлением приняли вызов и в некоторых случаях действительно доказали свое превосходство. В целом эффект оказался положительным — водители перестали категорически отвергать предлагаемые программой решения. Наоборот, теперь они относились к этому инструменту как к полезному дополнению к их собственным опыту, знаниям и интуиции.
2. Пассажиры, прибывавшие в международный аэропорт города Хьюстон, штат Техас, постоянно жаловались, что им приходится слишком долго ожидать получения багажа. Руководство аэропорта увеличило персонал данной службы аэропорта, полагая, что это позволит решит проблему, однако жалобы не прекращались. В конце концов решение было найдено — зал выдачи багажа был перенесен подальше от залов прибытия, и жалобы быстро прекратились. Пока пассажиры просто шли к залу выдачи багажа, персонал вполне успевал извлечь его из самолетов и выложить на транспортеры.
3. Группа американских и канадских специалистов ИО изучала возможность увеличить пропускную способность регистрационных стоек большого британского аэропорта. По одной из рекомендаций, выработанных этой группой, в видных местах вывесили таблички с указанием, что пассажиры, у которых осталось менее 20 минут до вылета, *должны* без очереди подойти к регистрационной стойке. Однако эта мера не имела успеха, поскольку пассажиры, особенно британцы, настолько уважают "живую" очередь, что не могли позволить себе подобную вольность.
4. На одном из сталелитейных заводов Индии первым продуктом, получаемым из железной руды, являются стальные слитки, из которых затем производят различные сталепрокатные изделия. Управляющий производством выявил слишком большую задержку между извлечением этих слитков из печей и последующим их прокатом на прокатных станах. В идеале прокатка слитков должна начинаться сразу же после получения их из печи, чтобы устранить потребность в повторном нагреве слитков. Первоначально данная проблема группой экспертов ИО была представлена в виде линейной модели, оптимизирующей баланс между производительностью литейной печи и пропускной способностью прокатного стана. В процессе исследования ситуации эксперты строили простые графики производительности плавильной печи, суммируя производство стальных слитков в

течение ее трехсменной работы. К своему удивлению, они обнаружили, что, хотя третья смена начинается в 23 часа, наибольшая производительность достигается только между 2 и 5 часами утра. Анализ ситуации показал, что операторы печи, работающие в третью смену, имели привычку в начале смены устраивать себе длительный период "раскачки", с последующим наверстыванием этого простоя в утренние часы. В результате поставленная проблема была решена простым выравниванием объема производства слитков в течение *всех* рабочих смен, для чего пришлось "поработать" с человеческим фактором.

5. Жильцы высотного дома постоянно жаловались на длительное ожидание лифта. На основе модели массового обслуживания это время было оптимизировано. Но предложенное решение не уменьшило поток жалоб. Дальнейшее изучение ситуации показало, что жильцам просто скучно ждать лифт. Проблема была решена, когда в холле возле лифтов повесили большие зеркала. Жалобы на длительное ожидание лифта прекратились: теперь жильцы коротают время возле лифтов, разглядывая себя и других в зеркале, что, согласитесь, почти не надоедает.
6. Несколько подразделений одного предприятия совместно использовали три грузовика для доставки необходимых им материалов. Заявки на транспортное обслуживание от всех подразделений помещались в единую очередь и удовлетворялись в порядке их поступления. Руководство подразделений постоянно жаловалось, что срок доставки нужных им материалов недопустимо велик и для решения проблемы нужен еще один, четвертый грузовик. Однако прямые наблюдения за реальным использованием машин показали, что их ежедневная загрузка совсем невелика и четвертый грузовик вовсе не нужен. Дальнейшие исследования показали, что в действительности проблема заключалась совсем в ином. Место парковки грузовиков находилось довольно далеко и из окон подразделений просматривалось лишь частично. Поэтому очень часто снабженцы, не имея возможности увидеть стоящую на стоянке свободную машину, решали, что все грузовики заняты, и откладывали выдачу заявки на доставку нужных материалов до их возвращения. Проблема была решена очень просто — установкой на парковке телефонного аппарата.

Из приведенных выше примеров, взятых из реальной жизни, можно сделать следующие выводы.

1. Прежде чем приступать к построению математических моделей, команда экспертов ИО должна рассмотреть возможность разрешения проблемы путем применения какого-либо "человеческого", а не технического решения. Часто простейшее предложение (перенос зала выдачи багажа или установка зеркал возле лифта) позволяет решить проблему за счет учета особенностей человеческого поведения, а не математическим моделированием. Отметим, что и стоимость такого решения значительно ниже, чем стоимость решения, полученного на основе математического моделирования. В связи с этим команды экспертов ИО обычно в качестве первого этапа исследования реальной проблемы проводят экспертизу ситуации путем привлечения специалистов, не связанных с математикой (при решении проблемы лифта такими специалистами были психологи). Эта особенность была выявлена британскими учеными, "пионерами" в области ИО, еще во время Второй мировой войны — в их команду разработчиков уже тогда входили специалисты по социологии, психологии и поведенческим наукам.
2. Прежде чем приступить к использованию сложных методов математического моделирования, необходимо проанализировать проблему в целом, взглянув на нее как бы с высоты птичьего полета. Часто это помогает обнаружить некие внешние причины, собственно и вызвавшие ее появление, но не имеющие прямого отношения к основному исследуемому процессу. В примере с доставкой материалов

грузовиками истинная причина проблемы была обнаружена именно таким образом, а значит, и решение оказалось предельно простым.

3. Анализ ИО никогда не начинается сразу с поиска решения построенной математической модели — сначала надо доказать обоснованность ее применения. Например, поскольку методы линейного программирования хорошо зарекомендовали себя на практике, существует тенденция использовать линейные модели в любых ситуациях. Это приводит к тому, что такие модели частенько плохо соответствуют характеру реальной проблемы. Сначала всегда следует проанализировать имеющиеся данные, используя для этого по возможности простые технологии (например, вычисляя средние, строя диаграммы и графики и т.п.). Когда проблема исследована и определена, для ее решения подбираются соответствующие методы. В примере со сталелитейным заводом простые временн*ы*е графики производства стальных слитков стали тем единственным средством, которое помогло исправить ситуацию.
4. Решения, как правило, реализуются через людей, а не через “бездушные” технологии. Любое решение, которое не учитывает человеческого поведения, обречено на провал. Причиной невыполнения рекомендаций команды консультантов британского аэропорта стало неучтенное этой командой культурное различие между Соединенными Штатами и Великобританией (американцы и канадцы более свободны в поведении, чем британцы). Кстати, правильный учет именно этого фактора позволил в конечном счете успешно внедрить в практику работы компании UPS новое программное обеспечение.

1.7. МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Решения реальных задач исследования операций должны быть плодом *коллективной работы*, когда заказчики исследований и аналитики работают бок о бок. Аналитикам ИО с их знаниями возможностей математического моделирования необходимы опыт и знание реальной ситуации, исходящие от клиента, для которого, собственно, и решается задача ИО.

Исследование операций как инструмент задачи принятия решения можно рассматривать и как науку, и как искусство. Наука здесь представлена всей мощью математических методов, а искусство — тем обстоятельством, что успех на всех этапах, предшествующих получению оптимального решения математической модели, в б*о*льшей степени зависит от творчества и опыта всей команды, занимающейся решением задачи ИО. Уиллимейн (Willemain, [8]) утверждает, что “эффективная практика [ИО] требует чего-то большего, чем только знания и компетентность. Она также требует, среди прочего, «технической» мудрости (т.е. понимания того, когда и как применять тот или иной метод или алгоритм) и определенного уровня коммуникабельности и организационных способностей”.

Из-за “неуловимого” человеческого фактора трудно дать точные предписания для реализации теории исследования операций на практике. Можно попытаться показать только общую направленность такой реализации.

На практике реализация методов ИО должна включать следующие этапы.

1. Формализация исходной проблемы.
2. Построение математической модели.
3. Решение модели.
4. Проверка адекватности модели.
5. Реализация решения.

Из всех приведенных выше этапов только третий, *решение модели*, достаточно точно определен и наиболее прост для реализации в рамках методологии ИО, поскольку действия на этом этапе основываются на точной математической теории. Выполнение остальных этапов в значительной мере является искусством, а не наукой. Поэтому мы не можем точно описать эти процедуры.

Формализация проблемы требует исследования той предметной области, где возникла рассматриваемая проблема. Это начальный этап работы любой команды аналитиков ИО. В результате такого исследования должны быть получены следующие три принципиальных элемента решаемой задачи: 1) описание возможных альтернативных решений, 2) определение целевой функции, 3) построение системы ограничений, налагаемых на возможные решения.

Построение математической модели означает перевод формализованной задачи, описание которой получено на предыдущем этапе, на четкий язык математических отношений. Если получена одна из стандартных математических моделей, например модель линейного программирования, то решение обычно достигается путем использования существующих алгоритмов. Если же результирующая модель очень сложная и не приводится к какому-либо стандартному типу моделей, то команда ИО может либо упростить ее, либо применить эвристический подход, либо использовать имитационное моделирование. В некоторых случаях только комбинация математической, имитационной и эвристической моделей может привести к решению исходной проблемы.

Решение модели, как уже упоминалось, — наиболее простой из всех этапов реализации методов исследования операций, так как здесь используются известные алгоритмы оптимизации. Важным аспектом этого этапа является *анализ чувствительности* полученного решения. Это подразумевает получение дополнительной информации о поведении "оптимального" решения при изменении некоторых параметров модели. Анализ чувствительности особенно необходим, когда невозможно точно оценить параметры модели. В этом случае важно изучить поведение оптимального решения в окрестности первоначальных оценок параметров модели.

Проверка адекватности модели предполагает проверку ее правильности, т.е. определения того, соответствует ли поведение модели в конкретных ситуациях поведению исходной реальной системы. Но сначала команда аналитиков ИО должна удостовериться, что модель не содержит "сюрпризов". Другими словами, надо убедиться, что решение, полученное в рамках построенной модели, имеет смысл и интуитивно приемлемо. Формальным общепринятым методом проверки адекватности модели является сравнение полученного решения (поведение модели) с известными ранее решениями или поведением реальной системы. Модель считается адекватной, если при определенных начальных условиях ее поведение совпадает с поведением исходной системы при тех же начальных условиях. Конечно, это не гарантирует, что при других начальных условиях поведение модели будет совпадать с поведением реальной системы. В некоторых случаях в силу разных причин невозможно прямое сравнение модели с реальной системой или сравнение решений, полученных в рамках этой модели, с известными решениями (например, из-за отсутствия таких данных). В такой ситуации для проверки адекватности математической модели можно использовать имитационное моделирование, т.е. сравнивать поведение математической и имитационной моделей.

Реализация решения подразумевает перевод результатов решения модели в рекомендации, представленные в форме, понятной для лиц, принимающих решения, т.е. заказчиков. Бремя этой непростой задачи ложится непосредственно на плечи команды аналитиков ИО.

1.8. ОБ ЭТОЙ КНИГЕ

Моррис (Morris, [5]) утверждает, что "изучение моделей не эквивалентно изучению моделирования". Автор постоянно держал эту важную мысль в голове во время подготовки десятого издания данной книги и сознательно старался привнести искусство моделирования в теорию исследования операций. Эта книга, кроме описания математических моделей, содержит большое количество упражнений и задач, которые позволят вам проникнуть в суть анализа практических ситуаций. Поскольку важность умения выполнять практические вычисления в ИО не вызывает сомнения, в этой книге также объясняется, как теоретические алгоритмы реализуются в существующих программных инструментах — от приложения TORA, ориентированного на решение собственно учебных задач, до коммерческих пакетов Excel, Excel Solver и AMPL.

Вы уже знаете, что ИО — одновременно и искусство, и наука. Первое — это искусство описания и моделирования проблем, а второе — способность решения построенных моделей с использованием (точных) математических алгоритмов. Начальный курс данного предмета должен привить учащимся ясное понимание высокой важности обоих этих аспектов. Это обеспечит им в будущем определенную уверенность в себе, которой в конечном счете им может не хватать, если обучение будет сосредоточено исключительно на первом аспекте ИО, т.е. искусстве моделирования, — исходя из того убеждения, что современные компьютеры освобождают пользователей от необходимости *понимать*, как работают математические алгоритмы, выбранные для решения модели.

Учащийся может совершенствовать свои умения моделирования и проведения вычислений, внимательно изучая комплексные задания, почерпнутые из различных источников. В главах этой книги приведено подробное описание множества полностью разработанных комплексных заданий, темы которых взяты из реальной жизни — только в приложении Д их около 50. Дополнительные примеры реализации комплексных заданий можно найти в различных журналах и научных публикациях, посвященных вопросам ИО. Автор настоятельно рекомендует журнал *Interfaces* (издательство INFORMS) как богатый источник интересных приложений теории ИО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Altier W. J. *The Thinking Manager's Toolbox: Effective Processes for Problem Solving and Decision Making*, Oxford University Press, New York, 1999.
2. Brown S. I. *Insight into Mathematical Thought*, NCTM, Reston, VA, 2013.
3. Checkland P. *Systems Thinking, System Practice*. Wiley, New York, 1999.
4. Evans J. *Creative Thinking in the Decision and Management Sciences*, South-Western Publishing, Cincinnati, Ohio, 1991.
5. Morris W. *On the Art of Modeling*, Management Science, Vol. 13, pp. B707–B717, 1967.
6. Paulos J. A. *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*. Hill and Wang, New York, 1988.
7. Singh S. *Fermat's Enigma*, Walker, New York, 1997.
8. Willemain T.R. *Insights on Modeling from a Dozen Experts*, Operations Research, Vol. 42, No. 2, pp. 213–222, 1994.

Литература, добавленная при переводе[4]

1. Вагнер Г. *Основы исследования операций*. — М.: Мир, 1972.
2. Вилкас Э. Й., Майминас Е.З. *Решения: теория, информация, моделирование*. — М.: Радио и связь, 1981.
3. Гермейер Ю. Б. *Введение в теорию исследования операций*. — М.: Наука, 1971.
4. Ларичев О. И. *Наука и искусство принятия решений*. — М.: Наука, 1979.
5. Ларичев О. И. *Объективные модели и субъективные решения*. — М.: Наука, 1987.
6. Краснощеков П. С., Петров А. А. *Принципы построения моделей*. — М.: Изд-во МГУ, 1983.

[4] Литература по исследованию операций на русском языке очень обширна. Но, поскольку данная книга позиционирует себя как учебник, мы будем приводить, в основном, монографии, "устоявшиеся" в качестве учебных пособий для вузов. — *Примеч. ред.*

7. Мур Дж., Уэдерфорд Л. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2004.

8. Шеннон Р. *Имитационное моделирование систем — искусство и наука*. — М.: Мир, 1978.

9. Грешилов А. А. *Математические методы принятия решений*. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.

УПРАЖНЕНИЯ[5]

Все приведенные ниже упражнения относятся к разделу 1.2.

1.1. В примере с билетами определите четвертую возможную альтернативу.

1.2. В примере с разбивкой огорода:

а) найдите два допустимых решения и определите, какое из них лучше (т.е. какое решение задает прямоугольник с большей площадью);

б) определите оптимальное решение поставленной задачи.

***1.3.** У вас есть два одинаковых шара, сделанных из твердого сплава. Тест на прочность *не будет* пройден, если шар, сброшенный с очередного этажа 100-этажного здания окажется помят. Сбрасывать шар со следующего этажа можно только в том случае, если при последнем испытании шар остался неповрежденным. Какое наименьшее количество сбрасываний шаров потребуется вам, чтобы определить самый высокий этаж, при падении с которого шар не повреждается, если пользоваться в испытаниях только этими двумя одинаковыми шарами?

***1.4.** Крис, Джим, Джон и Келли находятся на восточном берегу реки и хотят переправиться на западный берег с помощью каноэ. Каноэ может вместить не более двух человек. Крис, как наиболее сильный из всех своих друзей, может переправиться через реку за 1 минуту. У Джима, Джона и Келли на это уйдет соответственно 2, 5 и 10 минут. Если в каноэ находятся два человека, то время переправы определяется по слабейшему пассажиру. Цель друзей заключается в переправе на западный берег реки по возможности за минимальное время. Ваше задание:

а) найдите критерий для оценки альтернатив (помните, что каноэ — лишь средство передвижения, его нельзя отправить через реку пустым);

***б)** определите минимальное время переправы через реку всех друзей.

1.5. В игре в бейсбол Джим является подающим, а Джо — отбивающим мяч. Предположим, что Джим может сделать либо скоростной бросок, либо крученый, каждый раз выбирая вариант случайным образом. Если Джо правильно предугадает подачу крученного мяча, он успешно отобьет его в 5 случаях из 10, но, если Джим подаст крученный мяч, а Джо приготовится принять скоростной, он успешно отобьет его лишь в 2 случаях из 10. И наоборот, если Джо успешно предугадает скоростную подачу, он сможет успешно отбить мяч в 3 случаях из 10, иначе он сможет успешно отбить лишь 1 мяч из 10. Ваше задание:

а) определите для этой ситуации возможные альтернативы;

б) определите целевую функцию для данной задачи и поясните, как будет меняться ее вид в зависимости от выбора варианта оптимизации (максимизация или минимизация) критерия.

1.6. При постройке дома потребовалось обрезать шесть одинаковых балок длиной 6,5 м до требуемой длины 6 м. Процедура обрезки каждой балки предполагает следующую последовательность действий:

Операция	Время (с)
1. Поместить балку на козлы	15
2. Отложить нужный размер (6 м)	5

[5] В приложении Б даны решения для всех упражнений, номера которых в этом разделе (и соответствующих разделах других глав) отмечены символом звездочки.

Окончание таблицы

Операция	Время (с)
3. Нанести разметку линии отреза	5
4. Обрезать балку до нужного размера	20
5. Положить обрезанную балку на место	20

Эту работу будут выполнять три человека Двое из них совместно выполнят операции 1, 2 и 5, а третий — операции 3 и 4. На участке есть две пары козел, которые можно использовать для обрезки балок, причем на каждые козлы можно положить до трех балок одновременно. Предложите наилучший сценарий выполнения обрезки шести балок.

1.7. На столе выложена пирамида из десяти фишек, расположенных в четыре линии по горизонтали. Первая линия состоит из фишек 1, 2, 3, 4, расположенных на равном расстоянии друг от друга. Вторая линия образована фишками 5, 6 и 7, третья — фишками 8 и 9, а на четвертом уровне пирамиду завершает фишка 10. Вам необходимо “перевернуть” пирамиду — т.е. оставить в первой линии одну фишку, а на четвертой разместить 4. Перемещать фишки можно только по одной, двигая их *вокруг* остальных, т.е. не отрывая от стола и не протаскивая между другими фишками. Ваше задание:

а) найдите два возможных варианта решения;

б) определите наименьшее количество ходов, необходимое для выполнения задания.

1.8. У вас есть четыре цепочки, каждая из которых имеет по три цельных звена. Необходимо сделать из них браслет, соединив все цепочки в одно целое. Разрезка одного звена стоит 2 цента, а запайка — 3 цента. Ваше задание:

а) найдите два возможных варианта решения задачи и оцените их;

б) определите наименьшую стоимость изготовления браслета.

1.9. Игровое поле разделено на квадратные ячейки, расположенные в 11 рядов по 9 штук, и последовательно пронумерованные от 1 до 99. Каждой ячейке назначено скрытое денежное вознаграждение от 0 до 20 долларов. Игрок называет любое двузначное число, и из этого числа вычитается сумма двух его цифр — полученное значение определяет номер ячейки на доске. Связанное с ней денежное вознаграждение вручается игроку. Какие денежные вознаграждения должны быть назначены 99 ячейкам игровой доски, чтобы возможный выигрыш игрока был минимальным, независимо от количества сделанных им ходов? Очевидный вариант, когда *всем* ячейкам игрового поля назначается нулевое денежное вознаграждение, здесь не рассматривается.

***1.10.** Имеется 10 одинаковых ящиков, каждый из которых содержит по 10 бутылок воды. Все бутылки воды весят одинаково — 1 кг, за исключением одного дефектного ящика, в котором каждая из 10 бутылок весит только 900 г. Также имеются весы, на которых можно выполнять взвешивание. Ваше задание:

а) предложите метод обнаружения дефектного ящика;

***б)** какое наименьшее количество взвешиваний необходимо сделать, чтобы гарантировано обнаружить дефектный ящик?

(Совет: подумайте над тем, что именно вы будете взвешивать.)