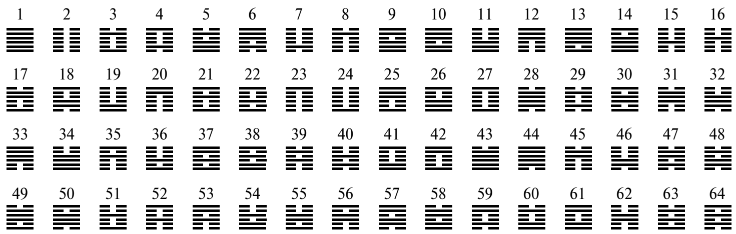
*[Эта тема] связана почти со всеми полезными знаниями,
которые только может воспринять человеческий разум.*

*— Якоб Бернулли (James Bernoulli).
Ars Conjectandi (Искусство догадки) (1713)*

7.2.1.7 Исторические и иные сведения

Ранние работы по генерации комбинаторных шаблонов начались вместе с зарождением цивилизации. Это очень интересная история, и, как мы увидим, она охватывает многие части мира и многие области человеческой деятельности, включая поэзию, музыку и религию. Здесь будут рассмотрены только некоторые основные вопросы, но такой краткий экскурс в историю не может не стимулировать интерес читателя и не подвигнуть его на более глубокое изучение данной темы.

Списки всех кортежей из n элементов прослеживаются тысячи лет назад в древних Китае, Индии и Греции. Наиболее примечательный источник (в силу того, что эта книга в современном переводе стала бестселлером) — это китайская *I Ching*, или *Yijing*, что означает "Книга изменений". В этой книге, одной из пяти классических книг конфуцианства, содержится ровно $2^6 = 64$ главы, каждая глава символизирует гексаграмму, образованную из шести линий, каждая из которых имеет вид либо ⚋ ("инь"), либо ⚊ ("ян"). Например, гексаграмма 1 состоит из линий ян ䷀, гексаграмма 2 — из линий инь ䷁, а гексаграмма 64 представляет собой чередующиеся ян и инь: ䷿. Вот полный список гексаграмм:



(1)

Такое размещение 64 возможных вариантов называется упорядочением Кинг Веня, так как авторство книги *I Ching* приписывается Кинг Веню (King Wen) (около 1100 года до н. э.), легендарному основателю династии Чу. К сожалению, древние тексты трудно надежно датировать, так что современные историки не видят оснований считать, что такой список гексаграмм был составлен ранее III века до н. э.

Обратите внимание, что в перечне (1) гексаграммы располагаются парами: за гексаграммой с нечетным номером идет гексаграмма, представляющая собой зеркальное отражение относительно горизонтальной оси, кроме случаев, когда гексаграмма симметрична, — в этих случаях гексаграмма спарена со своим дополнением ($1 = \overline{2}$, $27 = \overline{28}$, $29 = \overline{30}$, $61 = \overline{62}$). Гексаграммы, состоящие из двух триграмм, представляющих четыре основных элемента — воздух (☰), землю (☷), огонь (☲) и воду (☵), также размещаются специальным образом. Остальные гексаграммы размещаются по сути случайным образом. Определенные шаблоны, существующие в расположении пар, не более чем совпадения, подобные совпадениям в записи числа π (см. 3.3–(1)).

Инь и ян представляют собой взаимодополняющие стороны элементарных сил природы, всегда находящиеся в противоборстве и переходящие друг в друга. В определенном смысле *I Ching* представляет собой тезаурус, в котором гексаграммы служат указателями к накопленным знаниям о фундаментальных концепциях наподобие следующих: давать (䷀) или получать (䷁), скромность (䷎), радость (䷹), товарищество (䷌), изъятие (䷠), мир (䷊), война (䷅), организация (䷆), коррупция (䷑), незрелость (䷃), изящество (䷕) и т.д. Можно выбрать пару гексаграмм случайным образом, получая вторую из первой, например независимо заменяя каждый инь на ян и наоборот с вероятностью $1/4$; такой метод дает 4 096 способов размышлений об экзистенциалистских загадках, например: не может ли соответствующий марковский процесс приоткрыть тайну смысла жизни?

Строгий логический способ упорядочения гексаграмм был дан около 1060 года н. э. Шао Юнгом (Shao Yung). Его лексикографическое упорядочение от ䷁ к ䷖ к ䷇ к ䷓ к ䷏ к ...к ䷪ к ䷀ (каждую гексаграмму надо читать снизу вверх) существенно более понятное, чем порядок Кинг Веня. Когда Г.В. Лейбниц (G.W. Leibniz) изучал эту последовательность гексаграмм в 1702 году, он пришел к ложному выводу о том, что китайские математики были знакомы с бинарной арифметикой. [См. Frank Swetz, *Mathematics Magazine*, **76** (2003), 276–291. Дополнительную информацию об *I Ching* можно найти, например, в Joseph Needham *Science and Civilization in China* 2 (Cambridge University Press, 1956), 304–345; R.J. Lynn, *The Classic of Changes* (New York : Columbia University Press, 1994).]

Другой древнекитайский философ, Янг Цинг (Yang Hsiung), предложил систему, основанную на 81 тернарной тетраграмме, вместо 64 гексаграмм. Его *Канон высшего таинства* (*Canon of Supreme Mystery*), написанный около 2 года до н. э., не так давно был переведен на английский язык Майклом Найланом (Michael Nylan) (New York : Albany, 1993). Янг описывает структуру полного иерархического тернарного дерева, в которой имеется три края, по три провинции в каждом крае, по три департамента в каждой провинции, по три семьи в каждом департаменте, и по девять коротких стихов на семью — итого 729 стихов, т.е. почти в точности два стиха на каждый день года. Его тетраграммы располагаются в строгом лексикографическом порядке при чтении сверху вниз: 𝌆, 𝌇, 𝌈, 𝌉, 𝌊, 𝌋, 𝌌, ..., 𝍖. В действительности, как поясняется в книге Найлана (с. 28), Янг разработал простой способ для вычисления ранга каждой тетраграммы, как если бы он пользовался троичной системой счисления. Таким образом, нас не должно удивлять упорядочение бинарных гексаграмм Шао Юнгом, хотя он и жил более чем на 1000 лет раньше.

Индийская поэзия. Бинарные кортежи из n элементов изучались в совершенно ином контексте мудрецами в древней Индии, посвятившими себя священным ведическим песнопениям. Слоги в санскрите либо короткие (।), либо длинные (ऽ), а изучение шаблонов слогов называется просодией (prosody). Современные писатели вместо символов । и ऽ используют символы $\smile$ и —. Типичная ведическая строфа состоит из четырех строк с n слогами в строке, для некоторого $n \geqslant 8$. Таким образом, нужен способ классифицировать все 2^n возможных шаблонов. Классическая работа Пингалы (Piṅgala) *Чандасутра* (Chandaḥśāstra), написанная до 400 года н. э. (вероятно, существенно ранее — точная датировка неизвестна), описывает процедуру поиска индекса k любого заданного шаблона, состоящего из $\smile$ и —, а также поиск шаблона для заданного значения k. Другими словами, Пингала поясняет, как найти *ранг* данного шаблона и как найти шаблон по заданному *рангу*. Таким образом, он зашел в своих исследованиях дальше Янг Цинга (Yang Hsiung), который рассматривал только задачу поиска ранга, но не шаблона по заданному рангу. Методы Пингалы также связаны с возведением в степень, как мы видели ранее в связи с алгоритмом 4.6.3A.

Следующий важный шаг был сделан просодистом Кедарой (Kedāra) в его книге *Vṛttaratnākara*, которая, как считают, была написана в VIII веке. Кедара пошагово описал процедуру для перечисления всех n кортежей от $\smile - \ldots -$ к $- \smile - \ldots -$ к $\smile\smile - \ldots -$ к $- - \smile \ldots -$ к $\smile - \smile \ldots -$ к $\ldots$ к $\smile\smile\smile \ldots \smile$, т.е., по сути, алгоритм 7.2.1.1M для основания системы счисления, равного 2. Его метод можно считать первым явным алгоритмом для генерации комбинаторной последовательности. [См. B. van Nooten, *J. Indian Philos.*, **21** (1993), 31–50.]

Стихотворные измерения можно также рассматривать как ритмы, с одним тактом для каждого $\smile$ и с двумя для каждого $-$. Хотя n-тактовый шаблон может включать от n до $2n$ тактов, музыкальные ритмы для маршей или танцев обычно основаны на фиксированном количестве тактов. Следовательно, естественно рассматривать множество всех последовательностей $\smile$ и $-$, содержащих фиксированное значение m тактов. Такие последовательности называются последовательностями кода Морзе (Morse) длины m, и из упражнения 4.5.3–32 известно, что их ровно F_{m+1}. Например, 21 последовательность для $m = 7$ имеет вид

$$\begin{array}{l}
\smile - - -, - \smile - -, \smile\smile\smile - -, - - \smile -, \smile\smile - \smile -,\\
\smile - \smile\smile -, - \smile\smile\smile -, \smile\smile\smile\smile\smile -, - - - \smile,\\
\smile\smile - - \smile, \smile - \smile - \smile, - \smile\smile - \smile, \smile\smile\smile\smile - \smile,\\
\smile - - \smile\smile, - \smile - \smile\smile, \smile\smile\smile - \smile\smile, - - \smile\smile\smile,\\
\smile\smile - \smile\smile\smile, \smile - \smile\smile\smile\smile, - \smile\smile\smile\smile\smile, \smile\smile\smile\smile\smile\smile\smile\ .
\end{array} \tag{2}$$

Таким образом, индийские просодисты пришли к открытию последовательности Фибоначчи, как уже отмечалось в разделе 1.2.8.

Кроме того, анонимный автор *Prākṛta Paiṅgala* (около 1320 года) разработал элегантный алгоритм для определения ранга ритма и восстановления ритма по рангу для m-тактовых ритмов. Для поиска k-го шаблона начинаем с записи m символов $\smile$, затем выражаем разность $d = F_{m+1} - k$ как сумму чисел Фибоначчи $F_{j_1} + \cdots + F_{j_t}$; здесь F_{j_1} — наибольшее число Фибоначчи, не превышающее d, F_{j_2} — наибольшее число Фибоначчи, не превышающее $d - F_{j_1}$, и так до тех пор, пока не будет получен нулевой остаток. Тогда такты $j - 1$ и j заменяются с $\smile\smile$ на $-$ для $j = j_1, \ldots, j_t$. Например, для получения пятого элемента последовательности (2) мы вычисляем $21 - 5 = 16 = 13 + 3 = F_7 + F_4$; ответом является $\smile\smile - \smile\smile -$.

Несколькими годами позже Нараяна Пандита (Nārāyaṇa Paṇḍita) рассматривал более общую задачу поиска всех композиций m, части которых не превышают q, где q — *любое* данное положительное целое число. Как следствие, он открыл последовательности Фибоначчи q-го порядка 5.4.2–(4), которые пригодились через 600 лет после этого в многофазной сортировке; он также открыл соответствующие алгоритмы определения ранга и элемента по заданному рангу. [См. Parmanand Singh, *Historia Mathematica*, **12** (1985), 229–244, а также упражнение 16.]

Пингала дает специальные имена всем трехсложным измерениям:

——— = म (m),	——⏑ = त (t),	
⏑—— = य (y),	⏑—⏑ = ज (j),	(3)
—⏑— = र (r),	—⏑⏑ = भ (bh),	
⏑⏑— = स (s),	⏑⏑⏑ = न (n).	

И с тех пор все изучающие санскрит должны заучивать их наизусть. Давным-давно кто-то разработал способ запоминания этих кодов, придумав несуществующее слово *yamātārājabhānasalagām* (यमाताराजभानसलगाम्). Смысл в том, что десять слогов этого слова можно записать как

ya	mā	tā	rā	ja	bhā	na	sa	la	gām,	(4)
⏑	—	—	—	⏑	—	⏑	⏑	⏑	—	

после чего каждый трехсложный шаблон начинается с его имени. Происхождение слова *yamātārājabhānasalagām* неизвестно; Сабхаш Как (Subhash Kak) [*Indian J. History of Science*, **35** (2000), 123–127] проследил его до книги C.P. Brown *Sanskrit Prosody* (1869), с. 28; таким образом, его можно считать наиболее ранним известным "циклом де Брейна" для кодирования бинарных n-кортежей.

Тем временем в Европе. Классическая греческая поэзия также основывалась на группах коротких и/или длинных слогов, называемых метрической стопой (metrical feet), аналогично тактам в музыке. Например, два коротких слога '⏑⏑' назывались *пиррихий*, а два длинных '——' — *спондей*, поскольку эти ритмы использовались соответственно в песнях войны (πυρριχη) и мира (σπονδαι). Греческие названия метрических стоп ассимилировались латынью и в конечном счете современными языками, в том числе английским:

⏑ арсис (arsis)
— тезис (thesis)

⏑⏑ пиррихий (pyrrhic)
⏑— ямб (iambus)
—⏑ трохей (хорей) (trochee)
—— спондей (spondee)

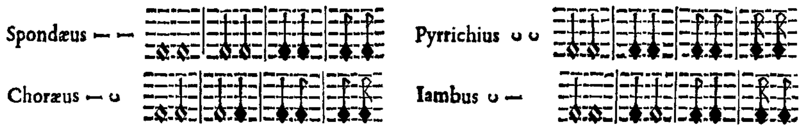
⏑⏑⏑ трибрахий (tribrach)
⏑⏑— анапест (anapest)
⏑—⏑ амфибрахий (amphibrach)
⏑—— бакхий (bacchius)
—⏑⏑ дактиль (dactyl)
—⏑— амфимакр (amphimacer)
——⏑ антибакхий (palimbacchius)
——— молосс (molossus)

⏑⏑⏑⏑ гиперпиррихий (прокелевсаматик) (proceleusmatic)
⏑⏑⏑— четвертый пеон (fourth pæon)
⏑⏑—⏑ третий пеон (third pæon)
⏑⏑—— ионик меньший (нисходящий) (minor ionic)
⏑—⏑⏑ второй пеон (second pæon)
⏑—⏑— диямб (diiambus)
⏑——⏑ антиспаст (antispast)
⏑——— первый эпитрит (first epitrite) (5)
—⏑⏑⏑ первый пеон (first pæon)
—⏑⏑— хориямб (choriambus)
—⏑—⏑ дитрохей, дихорей (ditrochee)
—⏑—— второй эпитрит (second epitrite)
——⏑⏑ ионик больший (восходящий) (major ionic)
——⏑— третий эпитрит (third epitrite)
———⏑ четвертый эпитрит (fourth epitrite)
———— диспондей (dispondee)

Зачастую используются альтернативные имена, например хорей (choree) вместо трохей (trochee), кретик (cretic) вместо амфимакр (amphimacer). Кроме того, во времена, когда Диомед (Diomedes) писал свою латинскую грамматику (около 375 года), как минимум по одному имени было у каждой из 32 пятисложных стоп.

Диомед также указал на отношения между дополняющими шаблонами; он привел пример трибрахия и молосса как *противоположностей* (contrarius), подобно амфибрахию и амфимакру. Однако он рассматривал как противоположности дактиль и анапест, а также бакхий и антибакхий, хотя сам термин *palimbacchius* обозначает не что иное, как "обратный bacchius". У греков не имелось стандартного порядка перечисления стоп, а их названия никак не связаны с бинарными числами, которые они представляют. [См. H. Keil, *Grammatici Latini*, **1** (1857), 474–482; W. von Christ, *Metrik der Griehen und Romer* (1879), 78–79.]

Дошедшие до нас фрагменты работы Аристоксена (Aristoxenus) *Элементы ритмов* (около 325 года до н. э.) показывают, что та же терминология была применима и к музыке. Те же традиции пережили эпоху возрождения; например, в книге Athanasius Kircher *Musurgia Universalis*, **2** (Rome, 1650) на стр. 32 можно встретить следующий фрагмент:



Кирхер описал все трех- и четырехнотные ритмы, соответствующие (5).

Ранние списки перестановок. Мы уже проследили историю формулы для подсчета перестановок в разделе 5.1.2; однако нетривиальные *списки* перестановок не публиковались еще сотни лет после того, как формула $n!$ была открыта. Первая из известных ныне таблиц была создана итальянским врачом Шаббетаи Донноло (Shabbetai Donnolo) в его комментариях к каббалистической книге *Sefer Yetzirah*, написанной в 946 году. В табл. 1 показан его список для $n = 5$ в том виде, в каком он был опубликован в Варшаве в 1884 году. (Буквы иврита в этой таблице используют средневековый шрифт, традиционно применяющийся в комментариях; обратите внимание, что буква מ заменяется буквой ם на левом конце слова.) Донноло перечислил все 120 перестановок шестибуквенного слова ונבתכם, начинающиеся с ם; затем он заметил, что другие 120 перестановок можно получить при использовании другой буквы в качестве первой, т.е. всего 720 перестановок. Его список включает группирование шести перестановок, но оно выполнено случайным образом, что и привело его к ошибке (см. упражнение 4). Хотя он знал общее количество перестановок и количество перестановок, начинающихся с данной буквы, алгоритма для их генерации у Донноло не было.

Полный список всех 720 перестановок множества $\{a, b, c, d, e, f\}$ имеется в книге Jeremias Drexel *Orbis Phaëthon* (Munich, 1629), на с. 668–671; в Кельнском издании 1631 года этот список находится на с. 526–531.) Он привел его в качестве доказательства того, что хозяин может размещать шестерых гостей за завтраком и обедом разными способами в течение года — всего 360 дней; пять дней в году он отвел для поста на Страстной неделе. Немного позже Марин Мерсенн (Marin Mersenne) привел все 720 перестановок шести нот {до, ре, ми, фа, соль, ля} в своей книге *Traitez*

Таблица 1. Средневековый список перестановок

דברים, דבירם, דבימר, דבמיר, דבמרי, דברמי, דרבים, דרבמי, דרימב, דריבם, דרמבי, דרמיב,
דיברם, דירבם, דירמב, דיבמר, דימבר, דימרב, דמביר, דמברי, דמרבי, דמריב, דמיבר, דמירב,
בדימר, בדירם, בדרמי, בדרים, בדמרי, בדמיר, בירמד, בידרם, בירדם, בימדר, בימרד, בידמר,
במדרי, במדיר, במריד, במרדי, במדיר, במירד, בדמיר, בדמרי, בדרמי, בדרים, בדימר, בדירם,
רימדב, רימבד, רידבם, רידמב, ריבדם, ריבמד, רדמבי, רדבמי, רדיבם, רדימב, רדבים, רדמיב,
רבמדי, רבדמי, רבדים, רבידם, רבימד, רבמיד, רמידב, רמיבד, רמדיב, רמביד, רמבדי, רמדבי,
ימדרב, ימרדב, ימבדר, ימברד, ימרבד, ימדבר, ידרבם, ידברם, ידבמר, ידמבר, ידרמב, ידמרב,
יבדרם, יבדמר, יברדם, יברמד, יבמדר, יבמרד, ירדבם, ירדמב, ירמבד, ירבמד, ירבדם, ירדמב,
מדברי, מדרבי, מדביר, מדיבר, מדירב, מדריב, מבדיר, מבידר, מבריד, מבירד, מברדי, מבדרי,
מרדבי, מרבדי, מרדיב, מרביד, מריבד, מרידב, מידבר, מידרב, מיברד, מיבדר, מירדב, מירבד

de la Voix et des Chants (Том 2. *Harmonie Universelle*, 1636) на с. 111–115; далее на с. 117–128 он предоставил ту же информацию в нотной записи:

Таблица Дрекселя организована лексикографически по столбцам; таблица Мерсенна лексикографически упорядочена в соответствии с отношением до < ре < ми < < фа < соль < ля; она начинается с перестановки "до, ре, ми, фа, соль, ля" и заканчивается "ля, соль, фа, ми, ре, до". Мерсенн также подготовил огромную рукопись, в которой перечислил все 40 320 перестановок *восьми* нот на 672 страницах размером ин-фолио, после чего привел алгоритмы для вычисления ранга перестановки и перестановки по рангу [Bibliothèque nationale de France, Fonds Français, no. 24 256].

Из раздела 7.2.1.2 мы знаем, что важные идеи алгоритма 7.2.1.2P были разработаны в Англии несколькими годами позже.

Методы перечисления всех перестановок мультимножества с *повторяющимися* элементами часто неверно понимались ранними авторами. Например, когда Бхаскара (Bhāskara) представил перестановки множества $\{4, 5, 5, 5, 8\}$ в разделе 271 своей книги *Līlāvatī* (около 1150 года), он привел их в следующем порядке:

४८५५५	८४५५५	५४८५५	५८४५५	५५४८५	
५५८४५	५५५४८	५५५८४	४५८५५	४५५८५	(6)
४५५५८	८५४५५	८५५४५	८५५५४	५४५८५	
५८५४५	५५४५८	५५८५४	५४५५८	५८५५४	

Мерсенн использовал более практичный, но не совсем систематический порядок при перечислении 60 анаграмм латинского имени IESVS на с. 131 своей книги. Когда Атанасиус Кирхер (Athanasius Kircher) хотел проиллюстрировать 30 перестановок пятинотной мелодии на с. 10—11 книги *Musurgia Universalis*, **2** (1650), такое отсутствие системы привело к неприятностям (см. упражнение 5).

(7)

Джон Уоллис (John Wallis) лучше справился со своей задачей. На с. 117 своей книги *Discourse of Combinations* (1685) он корректно перечислил 60 анаграмм слова “messes” в лексикографическом порядке, если считать m < e < s; а также рекомендовал соответствующий алфавитный порядок (с. 126).

Позже мы увидим, что индийские ученые Сарнгадева Śārṅgadeva и Нараяна Nārāyaṇa разработали теорию генерации перестановок в XIII и XIV веках, но эта работа опередила свое время и осталась незамеченной.

Список Секи. Такаказу Секи (Takakazu Seki) (1642–1708) был харизматичным учителем и ученым, революционизировавшим изучение математики в Японии в XVII веке. При изучении исключения переменных из систем однородных уравнений он пришел к выражениям $a_1b_2 - a_2b_1$ и $a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$, которые сегодня известны как *определители* (*детерминанты*). В 1683 году он опубликовал брошюру с этим открытием, в которую включил остроумную схему для перечисления всех перестановок таким образом, чтобы половина из них была “жива” (четна), а половина — “мертва” (нечетна). Начиная со случая $n = 2$, когда ‘12’ — живо, а ‘21’ — мертво, он сформулировал следующие правила для $n > 2$.

1) Возьми каждую живую перестановку для $n - 1$, увеличь все ее элементы на 1 и вставь впереди 1. Это правило дает $(n-1)!/2$ “базовых перестановок” $\{1, \ldots, n\}$.

2) Из каждой базовой перестановки образуй $2n$ других путем поворотов и отражений:

$$a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n, a_2 \ldots a_{n-1}a_na_1, \ldots, a_na_1a_2 \ldots a_{n-1}; \tag{8}$$

$$a_na_{n-1} \ldots a_2a_1, a_1a_na_{n-1} \ldots a_2, \ldots, a_{n-1} \ldots a_2a_1a_n. \tag{9}$$

Если n нечетно, перестановки в первой строке живые, а во второй — мертвые.

Если n четно, перестановки в каждой строке чередуются — живая, мертвая, ..., живая, мертвая.

Например, при $n = 3$ единственной базовой перестановкой является 123. Таким образом, 123, 231, 312 — живые, в то время как 321, 132 и 213 — мертвые, и мы успешно генерируем шесть членов определителя 3×3. Базовыми перестановками при $n = 4$ являются 1234, 1342, 1423; скажем, из 1342 мы получаем множество из восьми элементов, а именно

$$+1342 - 3421 + 4213 - 2134 + 2431 - 1243 + 3124 - 4312, \tag{10}$$

с чередующимися живыми $(+)$ и мертвыми $(-)$ перестановками. Определитель 4×4, таким образом, включает члены $a_1b_3c_4d_2 - a_3b_4c_2d_1 + \cdots - a_4b_3c_1d_2$, а также 16 других.

Правило Секи для генерации перестановок достаточно привлекательно, но, к сожалению, оно не работает при $n > 4$. Похоже, эта ошибка оставалась незамеченной столетиями. [См. Y. Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan* (1913), 191–199; *Takakazu Seki's Collected Works* (Osaka, 1974), 18–20.]

Списки сочетаний. Наиболее ранний исчерпывающий список *сочетаний*, выдержавший разрушительное действие времени, находится в главе 63 последней книги Сусруты (Suśruta), представляющей собой трактат о медицине и написанной до 600 года (вероятно, намного ранее). Заметив, что лекарства могут быть сладкими, кислыми, солеными, острыми, горькими и/или вяжущими, Сусрута старательно перечислил все $(15, 20, 15, 6, 1, 6)$ случаев, когда одновременно встречаются два, три, четыре, пять, шесть и одно из этих качеств.

Бхаскара (Bhāskara) повторил этот пример в разделах 110–114 своей книги *Līlāvatī* и заметил, что те же самые рассуждения применимы и к шестисложным стихотворным шаблонам с заданным количеством длинных слогов. Однако он просто упомянул конечные их количества $(6, 15, 20, 15, 6, 1)$, без перечисления самих сочетаний. В разделах 274 и 275 он заметил, что числа $(n)\,(n-1)\ldots(n-k+1)/(k(k-1)\ldots$ $\ldots(1))$ указывают наряду с количеством сочетаний количество *композиций* (compositions), т.е. упорядоченных разбиений, однако это замечание также сделано без приведения полного списка.

Чтобы избежать многословия,
рассмотрим этот вопрос вкратце,
поскольку наука о вычислениях — это океан без границ.
— Бхаскара (Bhāskara) (около 1150)

Интересный список сочетаний имеется в знаменитой работе по алгебре *Al-Bāhir fi'l-ḥisāb* (*Блистательная книга о вычислениях*), написанной аль-Самавалем (al-Samaw'al) из Багдада в 1144 году, когда ему было всего 19 лет. В заключительной части работы он представил список из $\binom{10}{6} = 210$ линейных уравнений с 10 неизвестными:

٦٥	٦٥٤٣٢١	ا	(1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 65$
٧٠	٧٥٤٣٢١	ب	(2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 = 70$
٧٥	٨٥٤٣٢١	جـ	(3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_8 = 75$
	$\vdots$		
٩١	١٠٩٨٧٦٤	زط	(209) $x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 91$
١٠٠	١٠٩٨٧٦٥	زي	(210) $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 100$

(11)

Каждое сочетание шести из десяти элементов дает одно из уравнений. Целью аль-Самаваля, несомненно, была демонстрация переопределенной системы линейных уравнений, которая, тем не менее, имеет единственное решение; для приведенной системы оно имеет вид $(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = (1, 4, 9, 16, 25, 10, 15, 20, 25, 5)$. [Salah Ahmad and Roshdi Rashed, *Al-Bāhir en Algèbre d'As-Samaw'al* (Damascus, 1972), 77–82, ٢٣١–٢٤٨.]

Игральные кости. Определенный проблеск в области элементарной комбинаторики был и в средневековой Европе, особенно в связи с вопросом о всех возможных сочетаниях выпадения трех костей. Разумеется, существует всего $\binom{8}{3} = 56$ способов выбрать три элемента из шести при разрешенных повторениях. Азартные игры были официально запрещены, но это не помешало упомянутым 56 способам стать общеизвестными. Около 965 года епископ Вибольд (Wibold) из Камбраи на севере Франции, разработал игру под названием Ludus Clericalis, дабы ею могли насладиться смиренные пастыри, оставаясь при этом достаточно набожными. Его идея состояла в том, чтобы связать с каждым набором очков одну из 56 добродетелей в соответствии с приведенной таблицей.

⚀⚀⚀ любовь	⚀⚄⚅ великодушие	⚂⚂⚄ молитва
⚀⚀⚁ вера	⚀⚅⚅ мудрость	⚂⚂⚅ привязанность
⚀⚀⚂ надежда	⚁⚁⚁ сожаление	⚂⚃⚃ суд Божий
⚀⚀⚃ справедливость	⚁⚁⚂ радость	⚂⚃⚄ бдительность
⚀⚀⚄ благоразумие	⚁⚁⚃ воздержанность	⚂⚃⚅ покорность
⚀⚀⚅ умеренность	⚁⚁⚄ удовлетворенность	⚂⚄⚄ невинность
⚀⚁⚁ храбрость	⚁⚁⚅ безмятежность	⚂⚄⚅ раскаяние
⚀⚁⚂ дружелюбие	⚁⚂⚂ мастерство	⚂⚅⚅ исповедь
⚀⚁⚃ целомудрие	⚁⚂⚃ простота	⚃⚃⚃ зрелость
⚀⚁⚄ милосердие	⚁⚂⚄ гостеприимство	⚃⚃⚄ забота
⚀⚁⚅ послушание	⚁⚂⚅ бережливость	⚃⚃⚅ постоянство
⚀⚂⚂ страх Божий	⚁⚃⚃ терпение	⚃⚄⚄ ум
⚀⚂⚃ предусмотрительность	⚁⚃⚄ усердие	⚃⚄⚅ томление
⚀⚂⚄ осторожность	⚁⚃⚅ бедность	⚃⚅⚅ плач
⚀⚂⚅ настойчивость	⚁⚄⚄ мягкость	⚄⚄⚄ веселье
⚀⚃⚃ доброжелательность	⚁⚄⚅ девственность	⚄⚄⚅ сочувствие
⚀⚃⚄ скромность	⚁⚅⚅ уважение	⚄⚅⚅ самообладание
⚀⚃⚅ смирение	⚂⚂⚂ благочестие	⚅⚅⚅ повиновение
⚀⚄⚄ доброта	⚂⚂⚃ снисхождение	

Игроки бросают кости, и первый, кто выбросил сочетание очков, соответствующее некоторой добродетели, получает ее. После того как все сочетания окажутся выброшенными, победителем становится наиболее добродетельный из игроков. Вибольд заметил, что любовь — наилучшая добродетель из всех. Он разработал сложную систему подсчета очков, по которой две добродетели могли комбинироваться, если сумма очков на всех шести костях для этих добродетелей равнялась 21. Например, так можно скомбинировать любовь и повиновение или целомудрие и ум, и такие комбинации ценились выше любых отдельных добродетелей. Вибольд рассматривал и более сложные варианты игры, в которых вместо точек на костях использовались гласные буквы.

Таблица Вибольда была представлена в лексикографическом порядке, как это сделано выше, при первом описании игры Балдериком (Balderic) в его *Chronicon Cameracense* около 150 лет спустя. [*Patrologia Latina*, **134** (Paris, 1884), 1007–1016.]

Однако в другом средневековом манускрипте возможные результаты бросания костей представлены в совершенно ином порядке:

⚅⚅⚅	⚄⚄⚄	⚃⚃⚃	⚂⚂⚂	⚁⚁⚁	⚀⚀⚀	⚅⚅⚄
⚅⚅⚃	⚅⚅⚂	⚅⚅⚁	⚅⚅⚀	⚄⚄⚅	⚄⚄⚃	⚄⚄⚂
⚄⚄⚁	⚄⚄⚀	⚃⚃⚅	⚃⚃⚄	⚃⚃⚂	⚃⚃⚁	⚃⚃⚀
⚂⚂⚅	⚂⚂⚄	⚂⚂⚃	⚂⚂⚁	⚂⚂⚀	⚁⚁⚅	⚁⚁⚄
⚁⚁⚃	⚁⚁⚂	⚁⚁⚀	⚀⚀⚅	⚀⚀⚄	⚀⚀⚃	⚀⚀⚂
⚀⚀⚁	⚅⚄⚃	⚄⚃⚂	⚃⚂⚁	⚂⚁⚀	⚅⚃⚁	⚅⚃⚀
⚅⚂⚀	⚄⚂⚀	⚅⚄⚂	⚅⚄⚁	⚅⚄⚀	⚅⚁⚀	⚄⚁⚀
⚃⚁⚀	⚄⚃⚁	⚄⚃⚀	⚅⚃⚂	⚃⚂⚀	⚅⚂⚁	⚄⚂⚁

(12)

В этом случае автор знал, как следует поступить с повторяющимися значениями, но использовал очень сложный, разработанный для данной конкретной задачи способ обработки ситуаций, когда очки на всех трех костях различны. [См. D.R. Bellhouse, *International Statistical Review*, **68** (2000), 123–136.]

Забавное стихотворение "Chaunce of the Dyse", приписываемое Джону Лидгейту (John Lydgate), было написано в начале 1400-х годов для вечеринок. Его начальные строфы приглашают каждого человека бросить три игральные кости; в остальных строфах, индексированных в обратном лексикографическом порядке от ⚅⚅⚅ до ⚅⚅⚄ до ...до ⚀⚀⚀, приводится 56 веселых описаний характера бросающего. [Полный текст опубликован Э.П. Хаммонд (E.P. Hammond) в *Englische Studien*, **59** (1925), 1–16; перевод на современный английский был бы очень кстати.]

I pray to god that euery wight may caste
Vpon three dyse ryght as is in hys herte
Whether he be rechelesse or stedfaste
So moote he lawghen outher elles smerte
He that is gilty his lyfe to converte
They in trouthe haue suffred many a throwe
Moote ther chaunce fal as they moote be knowe.

— *The Chaunce of the Dyse (около 1410)*

Раймунд Луллий. Значительный вклад в комбинаторные концепции внесен энергичным донкихотствующим каталонским поэтом, писателем-романистом, энциклопедистом, преподавателем, мистиком и миссионером по имени Раймон Луллий (Ramon Llull) (около 1232–1316). Подход Луллия к знаниям состоял, по сути, в определении базовых принципов с последующим рассмотрением всех возможных их сочетаний.

Например, одна из глав его *Ars Compendiosa Inveniendi Veritatem* (около 1274) начинается с перечисления шестнадцати свойств, присущих Богу: доброта, величие, бессмертие, могущество, мудрость, любовь, добродетель, истина, слава, совершенство, справедливость, великодушие, милосердие, скромность, владычество и терпение. Затем Луллий пишет $\binom{16}{2} = 120$ кратких эссе (около 80 слов каждое), рассматривающих доброту Бога в связи с величием, доброту в связи с бессмертием и т.д., завершая рассмотрением владычества Бога в связи с терпением. В другой главе он рассматривает семь добродетелей (веру, надежду, милосердие, справедливость, благоразумие, силу духа и умеренность) и семь пороков (чревоугодие, похоть, жадность, леность, гордыню, зависть и гнев), написав $\binom{14}{2} = 91$ подраздел, в каждом из которых попарно рассматриваются добродетель и порок. Другие главы так же систематически разделены на $\binom{8}{2} = 28$, $\binom{15}{2} = 105$, $\binom{4}{2} = 6$ и $\binom{16}{2} = 120$ подразделов. (Интересно, что было бы, если бы Луллий был знаком со списком Вибольда из 56 добродетелей? Написал бы он комментарии к каждой из $\binom{56}{2} = 1540$ пар?)

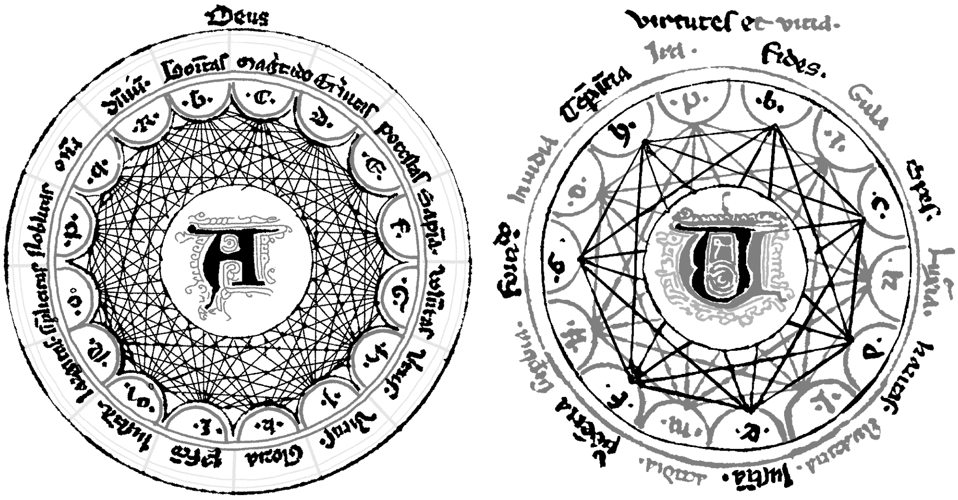


Рис. 44. Иллюстрация из манускрипта, подаренного Раймундом Луллием венецианскому дожу в 1280 году [Из его *Ars Demonstrativa*, Biblioteca Marciana, VI 200, folio 3^V]

Луллий иллюстрировал свою методологию, изображая круговые диаграммы, наподобие приведенных на рис. 44. Фигура слева, *Deus*, именует 16 божественных свойств — те же, что перечислены выше, за исключением того, что любовь (*amor*) здесь названа волей (*voluntas*), а последними четырьмя являются соответственно простота, ранг, милосердие и владычество. Каждому свойству назначена буква, и диаграмма иллюстрирует их взаимоотношения в виде полного графа K_{16} на множестве вершин $(B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R)$. Фигура справа, *virtutes et vitia*, показывает семь добродетелей (b, c, d, e, f, g, h), чередующихся с семью пороками (i, k, l, m, n, o, p); в оригинале рукописи добродетели изображены синими чернилами, а пороки — красными. Обратите внимание, что в этом случае на иллюстрации содержатся два независимых полных графа K_7 разных цветов. (Луллий больше не пытается сравнивать каждую отдельную добродетель с каждым отдельным пороком, поскольку и так понятно, что каждая добродетель лучше каждого порока.)

Луллий использовал тот же подход и когда писал о медицине: вместо сопоставления теологических концепций его книга *Liber Principiorum Medicinæ* (около 1275) рассматривает сочетания симптомов и лечения. Луллий также писал книги о философии, логике, юриспруденции, астрологии, зоологии, геометрии, риторике и рыцарстве — всего более 200 работ. Следует отметить, однако, высокую повторяемость его книг. Современные методы сжатия данных, вероятно, привели бы к тому, что

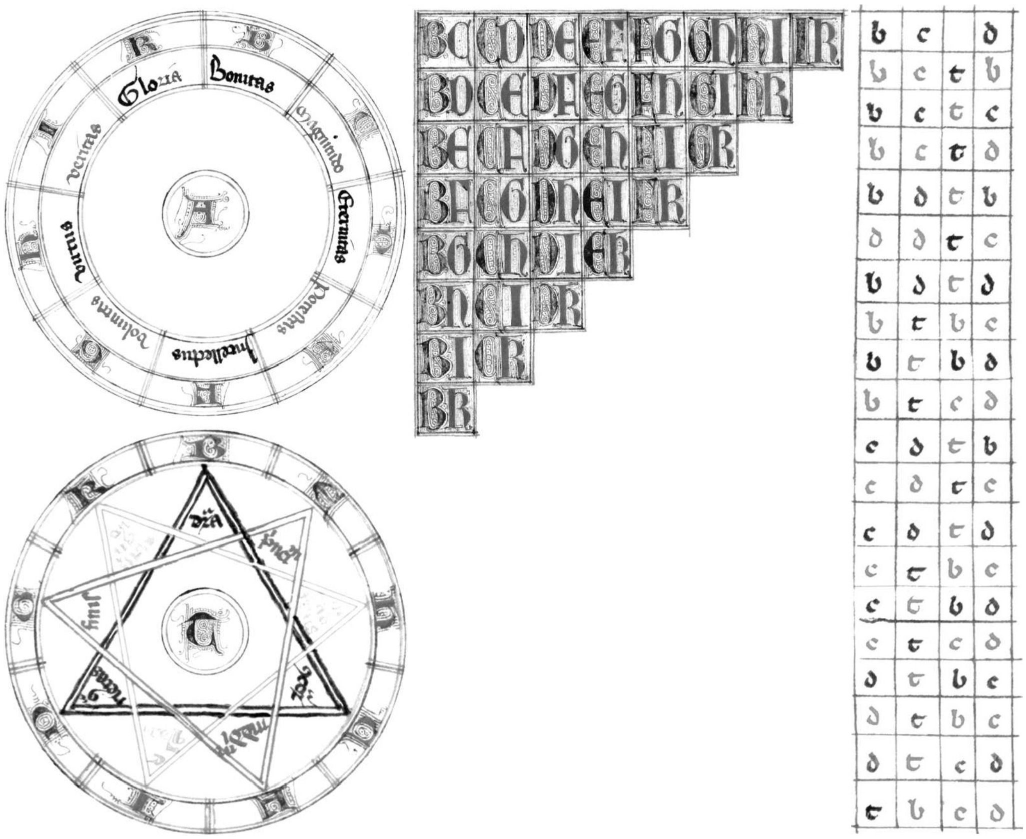


Рис. 45. Иллюстрации из манускрипта Луллия, подаренного королеве Франции (около 1325 года) [Badische Landesbibliothek Karlsruhe, Codex St. Peter perg. 92, folios 28^{V} and 39^{V}]

труды Луллия после сжатия были бы существенно меньшего размера, чем, скажем, Аристотеля.

В конечном счете Луллий решил упростить свою систему, работая в основном с группами из девяти элементов. Взгляните, например, на рис. 45, где в окружности, изображенной слева вверху, перечислены только первые девять из всех свойств, присущих Богу $(B, C, D, E, F, G, H, I, K)$. В ступенчатой диаграмме, расположенной рядом с окружностью, приведены $\binom{9}{2} = 36$ пар свойств $(BC, BD, \ldots, IK)$. Добавляя к семи две добродетели — терпение и сострадание, и к семи два порока — ложь и непостоянство, Луллий рассматривает пары добродетелей и пороков при помощи той же диаграммы. Он предложил также использовать эту диаграмму для проведения выборов при девяти кандидатах [см. I. McLean and J. London, *Studia Lulliana*, **32** (1992), 21–37].

Вписанные в окружность треугольники (рис. 45, слева внизу) иллюстрируют еще один ключевой аспект подхода Луллия. Треугольник (B, C, D) означает (различность, совместимость, противоположность), треугольник (E, F, G) — (начало, средина, конец), а треугольник (H, I, K) — (больше, равно, меньше). Эти три вложенных графа K_3 представляют три вида трехзначной логики. Луллий ранее экспериментировал с другими такими тройками, в особенности тройкой (истинно, неизвестно, ложно). Представление о том, как он использовал эти треугольники, можно получить, познакомившись с анализом Луллием четырех основных элементов (земля, воздух, огонь, вода). Все четыре элемента различны. Земля совместима с огнем, который совместим с воздухом, который совместим с водой, которая совместима с землей. Земля является противоположностью воздуху, а огонь — воде. Этим завершается анализ с использованием треугольника (B, C, D). Переходя к треугольнику (E, F, G), Луллий замечает, что разные процессы в природе начинаются при доминировании одного элемента над другим; затем выполняется переход, или среднее состояние, после чего достигается конечное состояние, например воздух становится горячим. По поводу треугольника (H, I, K) Луллий говорит, что в общем случае огонь $>$ воздух $>$ вода $>$ земля в плане их "сфер", "скоростей" и "знатности"; тем не менее мы также имеем, например, воздух $>$ огонь по отношению к поддержанию жизни, а при совместной работе воздух и огонь равны.

На рис. 45 справа приведена представленная Луллием вертикальная таблица, смысл которой станет понятен из упражнения 11. Он также разработал подвижные концентрические колеса, помеченные буквами $(B, C, D, E, F, G, H, I, K)$ и другими именами, что позволило ему работать со многими разнообразными типами элементов одновременно. Работая таким способом, верный последователь Луллия мог быть уверен, что рассматривает все возможные случаи. [Луллий мог видеть подобные колеса в ближайшей еврейской общине; см. M. Idel, *J. Warburg and Courtauld Institutes*, **51** (1988), 170–174, а также вклейки 16–17.]

Несколькими столетиями позже Атанасиус Кирхер (Athanasius Kircher) опубликовал развитие системы Луллия как часть большого тома, озаглавленного *Ars Magna Sciendi sive Combinatoria* (Amsterdam, 1669), в котором на с. 173 имелось пять подвижных колес. Кирхер также расширил множество используемых Луллием полных графов K_n, приведя иллюстрации полных *двудольных* графов $K_{m,n}$; например, рис. 46 взят со с. 171 книги Кирхера; на с. 170 той же книги показан граф $K_{18,18}$.

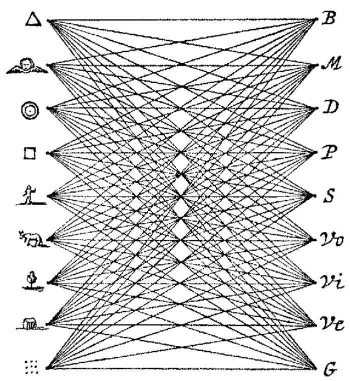


Рис. 46. Граф $K_{9,9}$, опубликованный Кирхером в 1669 году

Это искусство исследовать и изобретать.
Когда идеи комбинируются всеми возможными способами,
новые комбинации открывают новые пути для размышлений
и приводят к открытию новых истин и аргументов.

— *Мартин Гарднер (Martin Gardner),*
Логические машины и диаграммы (Logic Machines and Diagrams) (1958)

Наиболее далеко идущим современным развитием методов в духе Луллия, вероятно, является работа Иосифа Шиллингера (Joseph Schillinger) *The Schillinger System of Musical Composition* (New York : Carl Fischer, 1946), замечательный двухтомник, рассматривающий теории ритма, мелодии, гармонии, контрапунктов, композиции, оркестровки и прочего с точки зрения комбинаторики. Например, на с. 56 Шиллингер перечисляет 24 перестановки $\{a, b, c, d\}$ в порядке кода Грея (алгоритм 7.2.1.2P); на с. 57 он применяет их не к мелодии, а к ритму, к длительности нот; на с. 364 он приводит симметричный цикл

$$(2, 0, 3, 4, 2, 5, 6, 4, 0, 1, 6, 2, 3, 1, 4, 5, 3, 6, 0, 5, 1), \tag{13}$$

универсальный цикл 2-сочетаний для семи объектов $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; другими словами, (13) представляет собой эйлеров путь в K_7: все $\binom{7}{2} = 21$ пар цифр встречаются ровно по одному разу. Такие шаблоны — настоящая золотоносная жила композитора, но мы должны быть благодарны, что лучшие ученики Шиллингера (наподобие Джорджа Гершвина (George Gershwin)) все же не ограничились строго математическим восприятием эстетики.

Тако, ван Шутен и Изкуэрдо. В 1650-х годах были опубликованы еще три книги, связанные с рассматриваемой нами темой. Андре Тако (André Tacquet) написал общедоступную книгу *Arithmeticæ Theoria et Praxis* (Louvain, 1656), которая перепечатывалась и исправлялась в течение следующих 50 лет. В конце книги (с. 376 и 377) он привел процедуру для перечисления сочетаний по два, по три и т.д.

Книга Франца ван Шутена (Frans van Schooten) *Exercitationes Mathematicæ* (Leiden, 1657) была более серьезной. На с. 373 в ней перечислены все сочетания в виде привлекательной схемы

$$\begin{array}{c} \underline{a} \\ \underline{b.\ \ ab} \\ \underline{c.\ \ ac.\ \ bc.\ \ abc} \\ \underline{d.\ \ ad.\ \ bd.\ \ abd.\ \ cd.\ \ acd.\ \ bcd.\ \ abcd} \end{array}, \tag{14}$$

и следующие несколько страниц посвящены расширению данного шаблона при введении букв e, f, g, h, i, k “и так до бесконечности”. На с. 376 автор замечает, что в выражении (14) можно заменить (a, b, c, d) на $(2, 3, 5, 7)$ и получить делители 210, превышающие единицу.

$$\begin{array}{c} \underline{2} \\ \underline{3\ \ 6} \\ \underline{5\ \ 10\ \ 15\ \ 30} \\ \underline{7\ \ 14\ \ 21\ \ 42\ \ 35\ \ 70\ \ 105\ \ 210} \end{array} \tag{15}$$

На следующей странице начальная идея распространяется на

$$\begin{array}{c} a \\ \hline a.\ aa \\ \hline b.\ ab.\ aab \\ \hline c.\ ac.\ aac.\ bc.\ abc.\ aabc \end{array}, \tag{16}$$

таким образом позволяя иметь две буквы a. Тем не менее в действительности автор не понял это расширение; его следующий пример

$$\begin{array}{c} a \\ \hline a.\ aa \\ \hline a.\ aaa \\ \hline b.\ ab.\ aab.\ aaab \\ \hline b.\ bb.\ abb.\ aabb.\ aaabb \end{array} \tag{17}$$

выполнен неверно, указывая границы знаний того времени (см. упражнение 13).

На с. 411 ван Шутен заметил, что веса $(a,b,c,d) = (1,2,4,8)$ в (14) при использовании сложения дают

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2\ \ 3 \\ \hline 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7 \\ \hline 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15 \end{array}. \tag{18}$$

Однако он не увидел здесь связи с двоичными числами.

Двухтомник Себастьяна Изкуэрдо (Sebastián Izquierdo) *Pharus Scientiarum* (Lyon, 1659) — "Маяк науки" — включает в себя хорошо организованное обсуждение комбинаторики под заглавием Disputatio 29, *De Combinatione*. Автор приводит детальное обсуждение четырех ключевых частей "двенадцатизадачия" Стенли, а именно n-кортежей, n-размещений, n-мультисочетаний и n-сочетаний из m объектов, которые находятся в первых двух строках и двух столбцах табл. 7.2.1.4-1.

В разделах 81–84 *De Combinatione* автор перечисляет (в лексикографическом порядке) все сочетания из m букв по n, для $2 \leqslant n \leqslant 5$ и $n \leqslant m \leqslant 9$; он также протабулировал их для $m = 10$ и 20, при $n = 2$ и 3. Однако при перечислении $m^{\underline{n}}$ *размещений* m элементов по n он использовал более сложный порядок (см. упражнение 14).

Изкуэрдо был первым, кто открыл формулу $\binom{m+n-1}{n}$ для сочетаний m элементов по n с неограниченными повторениями; это правило встречается в § 48–51 его книги. Однако в § 105, когда он пытается перечислить все такие сочетания при $n = 3$, он не знает, что существует простой способ сделать это. Фактически его перечисление 56 случаев для $m = 6$ больше напоминает старый запутанный порядок (12).

Сочетания с повторениями не были хорошо поняты до тех пор, пока в 1713 году не вышла книга Якоба Бернулли (James Bernoulli) *Ars Conjectandi* ("Искусство догадки"). В части 2, главе 5 Бернулли просто перечислил все возможности в лексикографическом порядке и показал, что формула $\binom{m+n-1}{n}$ является простым следствием применения индукции. [Николо Тарталья (Niccolò Tartaglia), кстати, близко подошел к получению этой формулы в своей книге *General trattato di numeri, et misure*, **2** (Venice, 1556), 17^{r} и 69^{v}; то же справедливо и в отношении магрибского математика Ибн Мунима (Ibn Mun'im) и его книги *Fiqh al-Ḥisāb*, написанной в XIII веке.]

Нулевой случай. Перед тем как завершить наше рассмотрение ранних работ по сочетаниям, следует не забыть небольшой, но важный шаг, сделанный Джоном Уоллисом (John Wallis) в книге *Discourse of Combinations* (1685), где на с. 110 он, в частности, рассматривает сочетание 0 объектов из m элементов: "очевидно, что, когда мы *выбираем Ничто*, то мы *оставляем Все*. Это можно сделать только одним способом, сколько бы объектов у нас ни было". Кроме того, на с. 113 он утверждает, что $\binom{0}{0} = 1$: "в этом случае выбрать все или оставить все — это одно и то же".

Однако, приводя таблицу факториалов $n!$ для $n \leqslant 24$, он не зашел так далеко, чтобы указать, что $0! = 1$ или что имеется ровно одна перестановка пустого множества.

Работа Нараяны. Замечательная монография *Gaṇita Kaumudī* ("Наслаждение лотосом вычислений"), написанная Нараяной Пандита (Nārāyaṇa Paṇḍita) в 1356 году, стала не так давно известна за пределами Индии благодаря переводу на английский язык Парманандом Сингхом (Parmanand Singh) [*Gaṇita Bhāratī*, **20** (1998), 25–82; **21** (1999), 10–73; **22** (2000), 19–85; **23** (2001) 18–82; **24** (2002) 35–98]; см. также диссертацию Таканори Кусуба (Takanori Kusuba) из Brown University (1993). Глава 13 книги Нараяны, озаглавленная *Aṅka Pāśa* ("Соединение чисел"), посвящена комбинаторной генерации. Хотя 97 "сутр" этой главы достаточно загадочны, они содержат полную теорию, опередившую мировую науку в этой области на несколько столетий.

Например, Нараяна описывает генерацию перестановок в сутрах 49–55a, где приводит алгоритм для перечисления всех перестановок множества в уменьшающемся солексном порядке, приводя при этом способ вычисления ранга данной перестановки и восстановления перестановки по рангу. Эти алгоритмы появились более чем за столетие до этого в известной работе Сарнгадевы (Śārṅgadeva) *Saṅgītaratnākara* ("Добыча жемчуга музыки"), § 1.4.60–71. Таким образом, Сарнгадева, по сути, открыл факториальное представление положительных чисел. В сутрах 57–60 Нараяна развил алгоритмы Сарнгадевы так, что можно было легко переставлять мультимножества общего вида; например, он перечисляет перестановки мультимножества $\{1, 1, 2, 4\}$ в обратном солексном порядке:

$$1124, 1214, 2114, 1142, 1412, 4112, 1241, 2141, 1421, 4121, 2411, 4211.$$

В сутрах 88–92 Нараяна занимается систематической генерацией сочетаний. Помимо иллюстрации 3-сочетаний множества $\{1, \ldots, 8\}$, а именно

$$(678, 587, 478, \ldots, 134, 124, 123)\,,$$

он также рассматривает представление этих сочетаний в виде битовых строк в обратном порядке (*возрастающий* солексный порядок), тем самым развив метод Бхаттотпалы (Bhaṭṭotpala), разработанный в X веке:

$$(11100000, 11010000, 10110000, \ldots, 00010011, 00001011, 00000111)\,.$$

Он почти — но не до конца — открыл теорему 7.2.1.3L.

Перестановочная поэзия. Обратимся теперь к одному занимательному вопросу, привлекавшему внимание ряда видных математиков в XVII веке; это прольет свет на состояние комбинаторных знаний в Европе того времени. Иезуитский священник Бернард Баухуис (Bernard Bauhuis) сочинил однострочную хвалу Деве Марии в виде латинского гекзаметра:

$$\text{Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cælo.} \tag{19}$$

["У тебя столько добродетелей, Дево, как звезд на небе"; см. *Epigrammatum Libri V* (Cologne, 1615), 49.] Его стих побудил Эрикуса Путеануса (Erycius Puteanus), профессора университета в Лувене (University of Louvain), написать книгу *Pietatis Thaumata* (Antwerp, 1617), в которой он представил 1022 перестановки слов Баухуиса. Например, у Путеануса имеются следующие варианты:

107	Tot dotes tibi, quot cælo sunt sidera, Virgo.	
270	Dotes tot, cælo sunt sidera quot, tibi Virgo.	
329	Dotes, cælo sunt quot sidera, Virgo tibi tot.	
384	Sidera quot cælo, tot sunt Virgo tibi dotes.	(20)
725	Quot cælo sunt sidera, tot Virgo tibi dotes.	
949	Sunt dotes Virgo, quot sidera, tot tibi cælo.	
1022	Sunt cælo tot Virgo tibi, quot sidera, dotes.	

Он остановился на 1022 перестановках, потому что 1022 — количество видимых звезд, перечисленных в знаменитом каталоге Птолемея (Ptolemy).

Идея такой перестановки слов была хорошо известна в то время; эту игру слов в своей книге *Poetices Libri Septem* (Lyon, 1561), Book 2, Chapter 30, Юлиус Скалигер (Julius Scaliger) назвал "Стихами-хамелеонами" (Proteus verses). Латинский язык приспособлен для перестановок наподобие (20), поскольку окончания латинских слов зачастую выражают грамматическое значение существительного, делая относительный порядок слов существенно менее важным для смысла предложения, чем, например, в английском языке. Путеанус указал, однако, что он специально избегал неподходящих перестановок, например

$$\text{Sidera tot cælo, Virgo, quot sunt tibi dotes,} \tag{21}$$

поскольку они указывают не нижнюю, а *верхнюю* границу количества достоинств Девы Марии. [См. с. 12 и 103 книги Путеануса.]

Существует всего $8! = 40\,320$ способов перестановки слов в строке (19). Но цель состоит не в том, чтобы получить их все — большинство из них "нечитаемо". Каждый же из 1022 стихов Путеануса соответствует строгим правилам классического *гекзаметра*, которым следовали греческие и латинские поэты со времен Гомера и Вергилия:

i) каждое слово состоит из длинных (—) или коротких ($\smile$) слогов;

ii) слоги каждой строки принадлежат одному из 32 шаблонов:

$$\left\{\begin{matrix} -\smile\smile \\ -\,- \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -\smile\smile \\ -\,- \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -\smile\smile \\ -\,- \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -\smile\smile \\ -\,- \end{matrix}\right\} -\smile\smile \left\{\begin{matrix} -\smile \\ -\,- \end{matrix}\right\} \tag{22}$$

Другими словами, имеется шесть метрических стоп, причем каждая из первых четырех может быть либо дактилем, либо спондеем в терминологии (5); пятая стопа должна быть дактилем, а последняя — трохеем или спондеем.

Правила для определения длинных и коротких слогов в латинской поэзии в общем случае достаточно запутанны, но восемь слов Баухуиса соответствуют следующим шаблонам:

$$\text{tot} = -,\ \text{tibi} = \left\{\begin{matrix} \smile\smile \\ \smile\, - \end{matrix}\right\},\ \text{sunt} = -,\ \text{dotes} = --,$$
$$\text{Virgo} = \left\{\begin{matrix} -\,\smile \\ -- \end{matrix}\right\},\ \text{quot} = -,\ \text{sidera} = -\smile\smile,\ \text{cælo} = --. \tag{23}$$

Обратите внимание, что у поэтов есть по два варианта при использовании слов ‘tibi’ и ‘Virgo’. Таким образом, например, строка (19) соответствует шаблону гекзаметра

$$\begin{array}{cccccc} -\smile\smile & -\ - & -\ - & -\ - & -\smile\smile & -\ - \\ \text{Tot ti-bi} & \text{sunt do-} & \text{tes, Vir-} & \text{go, quot} & \text{si-de-ra} & \text{cæ-lo.} \end{array} \tag{24}$$

(Дактиль, спондей, спондей, спондей, дактиль, спондей; “там-тата там-там там-там там-там там-тата там-там”. Запятые представляют небольшие паузы при чтении стиха, именуемые цезурами (cæsura); здесь они на рассматриваются, хотя Путеанус аккуратно вставил их в каждую из 1022 перестановок.)

Возникает естественный вопрос: если переставить слова Баухуиса случайным образом, каковы шансы на то, что они будут гекзаметром? Иными словами, сколько перестановок подчиняются правилам (i) и (ii) с учетом шаблонов из (23)? Г.В. Лейбниц (G.W. Leibniz) рассматривал этот вопрос среди других в своей работе *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666), опубликованной, когда он претендовал на место в университете Лейпцига (University of Leipzig). В это время Лейбницу было только 19 лет, и по большей части он был самоучкой, так что его понимание комбинаторики было весьма ограниченным; например, он считал, что имеется 600 перестановок множества {до, до, ре, ми, фа, соль} и 480 — множества {до, до, ре, ре, ми, фа}, и даже утверждал, что (22) представляет 76 вариантов, а не 32 [см. §§ 5 и 8 в его задаче 6].

Однако Лейбниц понимал, что следовало бы разработать общие методы для подсчета всех “подходящих” перестановок в ситуациях, когда многие подстановки таковыми не являются. Он рассмотрел несколько примеров стихов-хамелеонов, корректно проведя подсчеты для более простых и наделав массу ошибок там, где слова оказывались сложнее. Хотя Лейбниц и упомянул работу Путеануса, он не пытался подсчитать количество гекзаметров среди перестановок строки (19).

Существенно более успешный подход был предложен несколько лет спустя Жаном Престетом (Jean Prestet) в работе *Élémens des Mathématiques* (Paris, 1675), 342–438. Престет привел рассмотрение данного вопроса, из которого вытекало наличие ровно 2196 перестановок слов хвалы Баухуиса, являющихся гекзаметрами. Однако вскоре он обнаружил, что упустил некоторое количество случаев, в частности случаи 270, 384, 725 из (20). Поэтому он полностью переписал данный материал при переиздании книги *Nouveaux Élémens des Mathématiques* в 1689 году. На с. 127–133 новой книги Престет показывает, что правильное количество перестановок-гекзаметров равно 3276, что почти на 50% превышает ранее указанное им число.

Тем временем Джон Уоллис (John Wallis) рассмотрел данную задачу в работе *Discourse of Combinations* (London, 1685), 118–119, опубликованной в качестве дополнения к его книге *Treatise of Algebra*. Объяснив, почему он считает, что корректное количество равно 3096, Уоллис допустил предположение, что он мог упустить некоторые варианты и/или сосчитать другие более чем по одному разу; "однако в настоящее время я не заметил за собой ни того, ни другого".

Анонимный критик работы Уоллиса указал, что верное количество перестановок составляет 2580, но не дал никакого доказательства этому факту [*Acta Eruditorum*, **5** (1686), 289]. Этим критиком почти наверняка был Лейбниц, хотя никакого ключа к пониманию числа 2580 среди его многочисленных неопубликованных заметок найдено не было.

Наконец, на сцене появляется Я. Бернулли, в инаугурационной лекции которого при вступлении в должность декана факультета философии университета Базеля (University of Basel) в 1692 году была упомянута данная задача и сказано, что аккуратный анализ дал корректный ответ, равный 3312(!) перестановкам. Доказательство Бернулли было опубликовано посмертно в первом издании *Ars Conjectandi* (1713), 79–81. [Эти страницы, кстати, были опущены в более поздних изданиях этой знаменитой книги и в сборниках работ Бернулли, поскольку изначально он не предназначал их для публикации; редактор внес их в книгу по ошибке. См. *Die Werke von Jakob Bernoulli*, **3** (Basel : Birkhauser, 1975), 78, 98–106, 108, 154–155.]

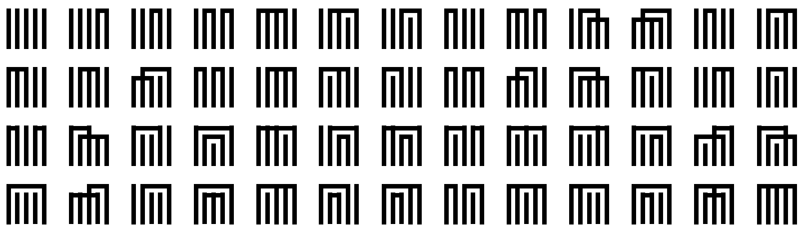
Так кто же был прав? Сколько же гекзаметров среди перестановок — 2196, 3276, 3096, 2580 или 3312? В.А. Уитворт (W.A. Whitworth) и В.Э. Хартли (W.E. Hartley) заново рассмотрели этот вопрос в *The Mathematical Gazette*, **2** (1902), 227–228, где каждый из них представил элегантные доказательства и сделал выводы, что ни одно из предложенных чисел не является корректным ответом. Их общим решением было 2880, и это был первый случай, когда два математика независимо получили одно и то же решение данной задачи. Но из упражнений 21 и 22 вы узнаете истину: прав был только Бернулли, все остальные ошибались. Кроме того, изучение трехстраничного вывода Бернулли указывает, что он был успешен в основном потому, что автор строго придерживался метода, который сейчас называется *методом с возвратом* (backtrack method). Мы тщательно изучим этот метод в разделе 7.2.2, где также узнаем, что рассматриваемая здесь задача легко решается как частный случай *задачи точного покрытия* (exact cover problem).

Даже мудрейшие и осторожнейшие люди часто страдают от того,
что логики называют неполным перечислением возможностей.
— Якоб Бернулли (James Bernoulli) (1692)

Разбиения множества. Похоже, впервые разбиения множеств изучались в Японии, где в конце XV — начале XVI веков среди высших классов стала популярна игра *генджи-ко* (genji-ko). Ведущий должен скрытно выбрать пять пакетов фимиама, причем некоторые из них могут быть одинаковы, и по очереди воскурить их. Игроки должны попытаться определить, какие запахи были одинаковы, а какие различны — словом, угадать, какое из $\varpi_5 = 52$ разбиений множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ выбрано ведущим.

Рис. 47. Диаграммы, использовавшиеся для представления разбиений множества в XVI веке в Японии [копия из коллекции Тамаки Яно (Tamaki Yano) из университета Сайтамы]

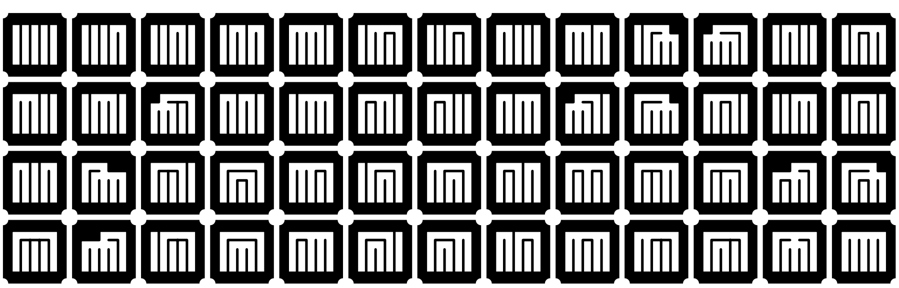
Вскоре стало привычным изображать 52 возможных варианта с помощью диаграмм, подобных приведенным на рис. 47. Например, верхняя диаграмма при чтении справа налево указывает, что одинаковы два первых запаха и три последних, т.е. это разбиение 12 | 345. Две другие диаграммы представляют соответственно разбиения 124 | 35 и 1 | 24 | 35. Чтобы помочь запоминанию, каждый из 52 шаблонов получил свое название благодаря знаменитой книге XI века г-жи Мурасаки (Murasaki) *Рассказ о генджи*, в соответствии с приведенной ниже последовательностью [*Encyclopedia Japonicæ* (Tokyo : Sanseido, 1910), 1299].



(25)

(Как и во множестве других примеров, варианты здесь перечислены без какого-то логичного порядка.)

Привлекательная природа шаблонов генджи-ко привела к тому, что многие семьи использовали их в качестве геральдических символов. Например, ниже приведены стилизованные версии (25), которые были найдены в стандартном каталоге узоров кимоно начала XX века:



[См. Fumie Adachi, *Japanese Design Motifs* (New York : Dover, 1972), 150–153.]

В начале XVIII века Такаказу Секи (Takakazu Seki) со своими учениками приступил к изучению количества разбиений множества ϖ_n для произвольного n, вдохновленный известным результатом $\varpi_5 = 52$. Ёшисуке Мацунага (Yoshisuke Matsunaga) нашел формулы для количества разбиений множества, когда имеется k_j подмножеств размером n_j для $1 \leqslant j \leqslant t$, и $k_1 n_1 + \cdots + k_t n_t = n$ (см. ответ к упражнению 1.2.5–21). Он также открыл базовое рекуррентное соотношение 7.2.1.5–(14), а именно

$$\varpi_{n+1} = \binom{n}{0}\varpi_n + \binom{n}{1}\varpi_{n-1} + \binom{n}{2}\varpi_{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\varpi_0, \tag{26}$$

при помощи которого легко вычислить значения ϖ_n.

Открытия Мацунаги остались неопубликованными до выхода в 1769 году книги Ёриюки Аримы (Yoriyuki Arima) *Shūki Sanpō*. Задача 56 из этой книги состоит в решении уравнения “$\varpi_n = 678\,570$” относительно n. Детальное решение Аримы (с надлежащими благодарностями Мацунаге) дает ответ $n = 11$.

Вскоре после этого Масанобу Сака (Masanobu Saka) изучал количество $\left\{ {n \atop k} \right\}$ способов разбиения множества из n элементов на k подмножеств в своей работе *Sanpo-Gakkai* (1782). Он открыл рекуррентную формулу

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k\left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\} \tag{27}$$

и протабулировал результаты для $n \leqslant 11$. Джеймс Стирлинг (James Stirling) в своей работе *Methodus Differentialis* (1730) открыл числа $\left\{ {n \atop k} \right\}$ в чисто алгебраическом контексте; таким образом, Сака был первым, кто осознал их комбинаторную важность.

Интересный алгоритм для перечисления всех разбиений множества был впоследствии открыт Тошиаки Хондой (Toshiaki Honda) (см. упражнение 24). Более детальную информацию о генджи-ко и ее связи с историей математики можно найти в статьях Tamaki Yano, *Sugaku Seminar*, **34**, 11 (Nov. 1995), 58–61; **34**, 12 (Dec. 1995), 56–60.

Разбиения множеств оставались практически не известными в Европе до гораздо более позднего времени, за исключением трех не связанных между собой случаев. Во-первых, в 1589 году Георг и/или Ричард Паттенхам (Georg and/or Richard Puttenham) опубликовал книгу *The Arte of English Poesie*, на с. 70–72 которой содержатся диаграммы, похожие на диаграммы генджи-ко. Например, приведенные ниже семь диаграмм использованы для иллюстрации возможных схем рифм в пятистрочных стихах, “где некоторые из них грубее и неприятнее для уха, чем иные”. Но этот визуально привлекательный список был неполон (см. упражнение 25).

(28)

Во-вторых, неопубликованная рукопись Г.В. Лейбница (G.W. Leibniz) конца XVII века свидетельствует, что он пытался вычислить количество способов разбиения множества $\{1, \ldots, n\}$ на три или четыре подмножества, но практически безуспешно. Он посчитал $\left\{ {n \atop 2} \right\}$ очень громоздким методом, который не позволил ему легко заметить, что $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$. Лейбниц попытался вычислить $\left\{ {n \atop 3} \right\}$ и $\left\{ {n \atop 4} \right\}$

только для $n \leqslant 5$ и сделал несколько числовых ошибок, что привело его к неверному ответу. [См. E. Knobloch, *Studia Leibnitiana Supplementa*, **11** (1973), 229–233; **16** (1976), 316-321.]

Третий европейский случай разбиений множества носит совершенно иной характер. Джон Уоллис (John Wallis) посвятил третью главу своей книги *Discourse of Combinations* (1685) вопросу о "кратных частях", истинных делителях чисел, в частности он изучал множество всех способов разложения данного числа на множители. Этот вопрос эквивалентен задаче о разбиениях *мультимножества*; например, разложения p^3q^2r по сути то же, что и разбиения мультимножества $\{p, p, p, q, q, r\}$, где p, q и r — простые числа. Уоллис разработал превосходный алгоритм для перечисления всех разложений данного целого числа n, по сути предвосхитив алгоритм 7.2.1.5M (см. упражнение 28). Однако он не исследовал важные частные случаи, когда n представляет собой степень простого числа (эквивалентно разбиениям целого числа) или когда n не содержит квадратов (эквивалентно разбиениям множества). Таким образом, хотя Уоллис и мог решить более общую задачу, ее сложность парадоксальным образом увела его с пути открытия разбиений чисел, чисел Белла, количества подмножеств Стирлинга и разработки простых алгоритмов генерации разбиений целых чисел или разбиений множеств.

Разбиения целых чисел. Разбиения целых чисел выходили на сцену комбинаторики еще медленнее. Епископ Вибольд (Wibold) (около 965 года) знал о разбиениях целых чисел на три части, не превышающие 6. О том же знал и Галилей (Galileo), который написал о них небольшую работу (около 1627 года) и который изучал частоты выпадения очков при бросании трех игральных костей. [*Sopra le scoperte de i dadi*, в его работе (*Opere*, Vol. 8, 591–594) Галилей перечислил разбиения в уменьшающемся лексикографическом порядке.]

Мерсенн (Mersenne) перечислил разбиения 9 на любое количество частей на с. 130 своей книги *Traitez de la Voix et des Chants* (1636). Для каждого разбиения $9 = a_1 + \cdots + a_k$ он, кроме того, вычислил мультиномиальный коэффициент $9!/(a_1! \ldots a_k!)$; как мы видели ранее, его интересовало количество различных мелодий, например он знал, что имеется $9!/(3!3!3!) = 1680$ мелодий из девяти нот $\{a, a, a, b, b, b, c, c, c\}$. Однако он не упомянул случаи $8 + 1$ и $3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$, вероятно потому, что не перечислял возможности каким-либо систематическим путем.

Лейбниц (Leibniz) рассматривал разбиения на две части в задаче 3 в работе *Dissertatio de Arte Combinatoria* (1666), а его неопубликованные заметки указывают, что впоследствии он потратил немало времени, пытаясь перечислить разбиения, состоящие из трех и более слагаемых. Он называл их (разумеется, на латыни) "discerptions" или реже "divulsions", а иногда — разделами ("sections"), рассеянием ("dispersions") или даже разбиениями ("partitions"). Они интересовали его в первую очередь из-за их связи с мономиальными симметричными функциями $\sum x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \ldots$. Однако множество попыток Лейбница почти всегда приводили к неудаче, за исключением случая трех слагаемых, когда он почти (но не совсем) открыл формулу для $\left|{n \atop 3}\right|$ (см. упражнение 7.2.1.4–31). Например, он аккуратно сосчитал только 21 разбиение 8, упустив случай $2 + 2 + 2 + 1 + 1$, а для $p(9)$ он получил только 26, потеряв $3 + 2 + 2 + 2$, $3 + 2 + 2 + 1 + 1$, $2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$ и $2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, несмотря на то что он пытался перечислять разбиения систематически в убывающем лексикографическом порядке. [См. E. Knobloch, *Studia Leibnitiana Supplementa*, **11** (1973), 91–258; **16** (1976), 255–337; *Historia Mathematica*, **1** (1974), 409–430.]

Де Муавр (de Moivre) был первым, реально достигшим успеха при изучении разбиений в своей статье "Метод возведения бесконечного многочлена в любую заданную степень, или извлечение из него заданного корня" [*Philosophical Transactions*, **19** (1697), 619–625 и рис. 5]. Он доказал, что коэффициент при z^{m+n} в $(az+bz^2+cz^3+ +\cdots)^m$ имеет по одному члену для каждого разбиения n; например, коэффициент при z^{m+6} равен

$$\begin{aligned}\tbinom{m}{6}a^{m-6}b^6+5\tbinom{m}{5}a^{m-5}b^4c+4\tbinom{m}{4}a^{m-4}b^3d+6\tbinom{m}{4}a^{m-4}b^2c^2+\\ +3\tbinom{m}{3}a^{m-3}b^2e+6\tbinom{m}{3}a^{m-3}bcd+2\tbinom{m}{2}a^{m-2}bf+\\ +\tbinom{m}{3}a^{m-3}c^3+2\tbinom{m}{2}a^{m-2}ce+\tbinom{m}{2}a^{m-2}d^2+\tbinom{m}{1}a^{m-1}g.\end{aligned} \qquad (29)$$

Если мы положим $a=1$, то член со степенями $b^ic^jd^ke^l\ldots$ соответствует разбиению с i единицами, j двойками, k тройками и т.д. Так, например, при $n=6$ он получил разбиения в порядке

$$111111, 11112, 1113, 1122, 114, 123, 15, 222, 24, 33, 6. \qquad (30)$$

Он пояснил, как перечислить разбиения рекурсивно (хотя и другим языком, связанным с его собственными обозначениями): для $k=1,2,\ldots,n$ начинаем с k и добавляем (ранее перечисленные) разбиения $n-k$, наименьшая часть которых не меньше k.

[Мое решение] упорядочено перед публикацией,
не столько для красоты,
сколько в процессе некоторых размышлений,
не достойных внимания любителей истины.
Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre) (1717)

П.Р. де Монморт (P.R. de Montmort) протабулировал все разбиения чисел $\leqslant 9$ на количество частей $\leqslant 6$ в своем труде *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* (1708) в связи с задачей об игральных костях. Его разбиения перечислены в ином, чем в (30), порядке, например:

$$111111, 21111, 2211, 222, 3111, 321, 33, 411, 42, 51, 6. \qquad (31)$$

По-видимому, Монморт не был знаком с работой де Муавра.

До сих пор практически никто из рассмотренных нами авторов не описал использовавшуюся им процедуру генерации комбинаторных шаблонов. Мы можем только догадываться об их методах (или их отсутствии), изучая опубликованные ими списки. Более того, в таких редких случаях, как статья де Муавра, в которой *имеется* явно описанный метод, автор полагает, что существуют списки всех шаблонов для случаев $1,2,\ldots,n-1$, перед тем как приступить к созданию списка для случая n. За исключением Кедары (Kedara) и Нараяны (Nārāyaṇa), ни один из авторов не привел метода генерации шаблонов "на лету", когда очередной шаблон получается из предшествующего непосредственно, без просмотра вспомогательных таблиц.

Естественно, что современные программисты предпочитают более прямые методы, требующие меньшего количества памяти.

Р.Й. Бошкович (R.J. Boscovich) опубликовал первый прямой алгоритм для генерации разбиений в *Giornale de' Letterati* (Rome, 1747), с. 393–404, вместе с двумя таблицами (с. 404). Его метод, который для $n = 6$ дает выход

$$111111, 11112, 1122, 222, 1113, 123, 33, 114, 24, 15, 6, \tag{32}$$

генерирует разбиения в точности в обратном порядке по отношению к порядку, получаемому при работе алгоритма 7.2.1.4P. Метод Бошковича, по сути, описан в разделе 7.2.1.4, с тем исключением, что обратный порядок приводит к несколько более простому и быстрому алгоритму, чем порядок, выбранный Бошковичем.

Бошкович опубликовал продолжение своей работы в *Giornale de' Letterati* (Rome, 1748, с. 12–27 и 84–99), развив свой алгоритм в двух направлениях. Во-первых, он рассмотрел генерацию только тех разбиений, части которых принадлежат заданному множеству S, с тем чтобы возводить в m-ю степень символьные полиномы с разреженными коэффициентами. (Он утверждал, что наибольший общий делитель всех элементов S должен быть равен 1; в действительности, однако, его метод не работает, если $1 \notin S$.) Во-вторых, он разработал алгоритм для генерации разбиений n на m частей для заданных n и m. И опять ему не повезло: для решения этой задачи впоследствии был разработан более удачный алгоритм 7.2.1.4H, что лишило Бошковича шансов на славу.

Ода Гинденбургу. Изобретателем алгоритма 7.2.1.4H был Карл Фридрих Гинденбург (Carl Friedrich Hindenburg), который "переоткрыл" алгоритм Нараяны 7.2.1.2L — способ генерации перестановок мультимножества. К сожалению, этот небольшой успех привел его к вере в то, что он осуществил революционный прорыв в математике (хотя он и снизошел до того, что упомянул других исследователей, в частности де Муавра, Эйлера и Ламберта, которые близко подошли к аналогичным открытиям).

Гинденбург был в числе основателей первых математических журналов Германии (издававшихся в 1786–1789 и 1794–1800 годах) и автором статей в них. Он неоднократно занимал должность декана в университете Лейпцига (University of Leipzig), а в 1792 году был его ректором. Если бы он имел немного больше способностей к математике по сравнению с тем, чем был наделен на самом деле, германская математика процветала бы именно в Лейпциге, а не в Берлине и Геттингене. Однако первая же математическая работа Гинденбурга, *Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden* (Leipzig, 1776), достаточно ярко показала, чего следует ожидать: его "ganz neue" (совершенно новая) идея заключалась в придании комбинаторного смысла цифрам десятичной записи чисел. Невероятно, но Гинденбург завершил свою монографию большими таблицами — таблицей чисел от 0000 до 9999, после которой следовали таблицы четных и нечетных чисел в отдельности (!).

Гинденбург публиковал письма людей, хваливших его работу, и приглашал их писать статьи в его журналы. В 1796 году он редактировал *Sammlung combinatorischanalytischer Abhandlungen*, где в подзаголовке было указано, что теорема о полиномах де Муавра "является наиболее важной во всем математическом анализе". Около десятка людей объединили свои усилия и образовали то, что впоследствии стало известно как “школа комбинаторики Гинденбурга”, и опубликовали тысячи страниц, заполненных эзотерическим символизмом, поражавшим воображение множества людей, не имеющих отношения к математике.

С точки зрения информатики работа этой школы не может считаться совершенно тривиальной. Например, лучший студент Гинденбурга, Г.А. Роте (H.A. Rothe), заметил, что имеется простой способ перейти от последовательности кода Морзе к следующей за ней в лексикографическом порядке или к предшествующей. Другой ученик, И.К. Буркхардт (J.C. Burkhardt), заметил, что последовательности кодов Морзе длиной n могут быть легко сгенерированы, если сначала рассмотреть коды без тире, затем с одним тире, далее с двумя и т.д. Их целью была не табуляция стихотворных форм с n тактами, как это делалось в Индии, а перечисление членов континуантов $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, формула 4.5.3–(4). [См. *Archiv für reine und angewandte Mathematik*, **1** (1794), 154–194.] Кроме того, на с. 53 упоминавшегося выше *Sammlung* Г.С. Клюгель (G.S. Klugel) привел способ перечисления всех перестановок, который впоследствии получил название алгоритма Орд-Смита (Ord-Smith); см. формулы (23)–(26) в разделе 7.2.1.2.

Гинденбург верил, что его методы заслуживают достойного места в учебных курсах алгебры, геометрии и вычислений. Однако и он, и его ученики ограничивались в своих работах составлением списков комбинаторных объектов. Закопавшись в своих формулах и формализме, им редко удавалось открыть что-то действительно интересное с точки зрения математики. Эжен Нетто (Eugen Netto) замечательно охарактеризовал их работу в *Geschichte der Mathematik* М. Кантора (M. Cantor), **4** (1908), 201–219: “Какое-то время они контролировали германский рынок, но большинство из того, что они откопали, тут же засыпало песком забвения”.

Грустным итогом их исследований стало то, что в результате комбинаторика в целом стала восприниматься как лженаука. Геста Миттаг-Леффлер (Gosta Mittag-Leffler), собравший великолепную библиотеку математической литературы примерно через 100 лет после смерти Гинденбурга, решил поместить все такие работы на отдельной полке, помеченной “Декаденс”. Эта категория осталась в шведском институте Миттаг-Леффлера и сегодня, несмотря на то что этот институт привлекает со всего мира математиков, работающих в области комбинаторики, труды которых можно назвать как угодно, но никак не упадничеством.

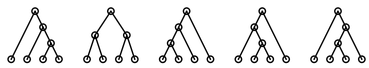
Во всем есть хорошая сторона, и мы можем отметить, как минимум, одну хорошую книгу, появившуюся в результате всей этой деятельности. Это *Die combinatorische Analysis* (Vienna, 1826) Андреаса фон Эттингсхаузена (Andreas von Ettingshausen), заслуживающая внимания как первая книга, в которой методы генерации комбинаторных объектов рассматриваются ясно и последовательно. Эттингсхаузен рассмотрел общие принципы лексикографической генерации в § 8 и применил их для построения метода перечисления всех перестановок (§ 11), сочетаний (§ 30) и разбиений (§ 41–44).

А где же деревья? Итак, мы уже видели, что на протяжении истории человечества неоднократно создавались списки кортежей, перестановок, сочетаний и разбиений. Таким образом, мы рассмотрели эволюцию тем в разделах 7.2.1.1–7.2.1.5, но наш рассказ будет неполон, если мы не проследим происхождение генерации деревьев — тему раздела 7.2.1.6.

Однако исторические сведения по этой теме до прихода компьютеров практически отсутствуют, если не считать нескольких статей, опубликованных в XIX веке Артуром Кейли (Arthur Cayley). Основная работа Кейли по деревьям была опубликована в 1875 году и перепечатана в его *Collected Mathematical Papers* (Vol. 4, 427–460); она содержала большую иллюстрацию со всеми свободными деревьями не более чем с девятью непомеченными вершинами. Ранее в этой статье он также привел девять *ориентированных* деревьев с пятью вершинами. Методы, использовавшиеся Кейли для получения этих списков, были весьма сложными, совершенно отличавшимися от алгоритма 7.2.1.6O и упр. 7.2.1.6–90. Все свободные деревья не более чем с десятью вершинами были перечислены много лет спустя Ф. Харари (F. Harary) и Д. Принсем (G. Prins) [*Acta Math.*, **101** (1958), 158–162], которые дошли до $n = 12$ для случаев свободных деревьев, не имеющих узлов степени 2 и не обладающих симметрией.

Деревья, наиболее любимые кибернетиками, — бинарные деревья, или эквивалентные упорядоченные леса, или вложенные скобки — как ни странно, в литературе отсутствуют. В разделе 2.3.4.5 мы видели, что многие математики на протяжении 1700–1800-х годов изучали количество бинарных деревьев; мы также знаем, что числа Каталана C_n подсчитывают десятки различных комбинаторных объектов. Однако до 1950 года, похоже, никто не публиковал *список* из $C_4 = 14$ объектов порядка 4 *любого* вида, и еще меньше авторов публиковали список из $C_5 = 42$ объектов порядка 5. (За косвенным исключением — 42 диаграммы генджи-ко из (25), не имеющие пересекающихся линий, оказываются эквивалентны 5-узловым бинарным деревьям и лесам. Однако этот факт не изучался до XX века.)

Имеется несколько отдельных примеров, когда в былые дни авторы составляли списки из $C_3 = 5$ объектов, связанных с числами Каталана. Здесь также первым был Кейли; он привел бинарные деревья с тремя внутренними узлами и четырьмя листьями [*Philosophical Magazine*, **18** (1859), 374–378].

 (33)

(В той же статье проиллюстрированы другие разновидности деревьев, эквивалентные так называемым слабым упорядочениям (weak orderings).) В 1901 году Нетто перечислил пять способов расстановки скобок в выражении '$a + b + c + d$':

$$(a+b)+(c+d)\,,[(a+b)+c]+d,[a+(b+c)]+d,a+[(b+c)+d]\,,a+[b+(c+d)] \quad (34)$$

[*Lehrbuch der Combinatorik*, § 122.] Пять перестановок множества $\{+1, +1, +1, -1, -1, -1\}$, частичные суммы которых неотрицательны, перечислены П. Эрдешем (P. Erdős) и Ирвингом Каплански (Irving Kaplansky) [*Scripta Math.*, **12** (1946), 73–75]:

$$1+1+1-1-1-1, 1+1-1+1-1-1, 1+1-1-1+1-1,$$
$$1-1+1+1-1-1, 1-1+1-1+1-1. \quad (35)$$

Несмотря на то что в приведенных примерах используется только пять объектов, мы видим, что упорядочение в (33) и (34) выполнено "как получится"; и только упорядочение (35), соответствующее алгоритму 7.2.1.6P, систематическое и лексикографическое.

Мы также должны вкратце отметить работу Вальтера фон Дика (Walther von Dyck), поскольку многие современные статьи используют термин “Слова Дика” (“Dyck words”), говоря о строках вложенных скобок. Дик был педагогом, известным, помимо прочего, как сооснователь Немецкого музея в Мюнхене (Deutsches Museum). Он также написал две пионерские статьи по теории свободных групп [*Math. Annalen*, **20** (1882), 1–44; **22** (1883), 70–108]. Так называемые слова Дика имеют очень слабое отношение к его реальным исследованиям. Он изучал слова на алфавите $\{x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_k, x_k^{-1}\}$, которые приводятся к пустой строке после многократного удаления пар соседних букв вида $x_i x_i^{-1}$ или $x_i^{-1} x_i$; связь со скобками и деревьями возникает, только если ограничиться первым случаем, $x_i x_i^{-1}$.

Итак, мы можем заключить, что, несмотря на огромный рост интереса к бинарным деревьям и их “родственникам” после 1950 года, такие деревья — единственный предмет нашего рассмотрения, исторические корни которого крайне неглубоки.

После 1950. Разумеется, выход на сцену электронных вычислительных машин резко все изменил. Первой ориентированной на применение компьютеров публикацией о методах комбинаторной генерации стала статья Ч.Б. Томпкинса (C.B. Tompkins) “Machine attacks on problems whose variables are permutations” (Машинное решение задач, переменными которых являются перестановки) [*Proc. Symp. Applied Math.*, **6** (1956), 202–205]. За ней не замедлили последовать тысячи других.

Ряд статей Д.Г. Лемера (D.H. Lehmer), особенно “Teaching combinatorial tricks to a computer” (Обучение компьютера комбинаторным трюкам) [*Proc. Symp. Applied Math.*, **10** (1960), 179–193], оказали исключительно большое влияние на исследования в то время. [См. также *Proc. 1957 Canadian Math. Congress* (1959), 160–173; *Proc. IBM Scientific Computing Symposium on Combinalorial Problems* (1964), 23–30; а также главу 1 книги *Applied Combinatorial Mathematics* под ред. E.F. Beckenbach (Wiley, 1964), 5–31.] Лемер оказался важным связующим звеном с предыдущими поколениями. Так, например, записи в Стэнфордской библиотеке свидетельствуют, что в январе 1932 года он изучал *Lehrbuch der Combinatorik* Э. Нетто.

Основные публикации, посвященные рассматривавшимся нами конкретным алгоритмам, упоминались в предыдущих разделах, так что повторять их здесь нет необходимости. Однако следует упомянуть три книги, которые заслуживают особого внимания, поскольку именно в них были заложены общие принципы.

- *Elements of Combinatorial Computing* Марка Б. Уэллса (Mark B. Wells) (Pergamon Press, 1971), особенно глава 5.

- *Combinatorial Algorithms* Альберта Ньенхуиса (Albert Nijenhuis) и Герберта С. Вильфа (Herbert S. Wilf) (Academic Press, 1975). Второе издание книги вышло в 1978 году и содержало дополнительный материал; впоследствии Вильф написал *Combinatorial Algorithms: An Update* (Philadelphia : SIAM, 1989).

- *Combinatorial Algorithms: Theory and Practice* Эдварда М. Рейнгольда (Edward M. Reingold), Юрга Нивергельта (Jurg Nievergelt) и Нарсингха Део (Narsingh Deo) (Prentice-Hall, 1977), особенно материал главы 5.

Роберт Седжвик (Robert Sedgewick) опубликовал первый серьезный обзор по методам генерации перестановок в *Computing Surveys*, **9** (1977), 137–164, 314. Второй вехой стал обзор Карлы Сэведж (Carla Savage), посвященный кодам Грея [*SIAM Review*, **39** (1997), 605–629].

Ранее мы уже отмечали, что алгоритмы для генерации объектов, подсчитываемых при помощи чисел Каталана, не были созданы до тех пор, пока разработчики программного обеспечения не ощутили в них потребность. Первые опубликованные алгоритмы не цитировались в разделе 7.2.1.6, поскольку были вытеснены более эффективными методами, однако здесь самое подходящее место упомянуть о них. Во-первых, Г.Я. Скоинс (H.I. Scoins) привел два рекурсивных алгоритма для генерации упорядоченных деревьев в той же статье, которую мы уже цитировали, говоря о генерации *ориентированных* деревьев [*Machine Intelligence*, **3** (1968), 43–60]. Его алгоритмы работают с представлением бинарных деревьев в виде битовых строк, что, по сути, эквивалентно польской префиксной записи или вложенным скобкам. Затем Марк Уэллс (Mark Wells) в разделе 5.5.4 упоминавшейся выше книги генерировал бинарные деревья, представляя их в виде непересекающихся разбиений множеств. Наконец, Гари Кнотт (Gary Knott) [*CACM*, **20** (1977), 113–115] разработал рекурсивные алгоритмы для определения ранга бинарного дерева и поиска бинарного дерева по заданному рангу, представляя деревья при помощи перестановок $q_1 \ldots q_n$ из табл. 7.2.1.6–3.

Алгоритмы для генерации остовных деревьев заданного графа были опубликованы рядом авторов еще в 1950-е годы; толчок к таким алгоритмам дало изучение электрических сетей. Вот некоторые из самых ранних работ в этом направлении: N. Nakagawa, *IRE Tkans.*, **CT-5** (1958), 122–127; W. Mayeda, *IRE Trans.*, **CT-6** (1959), 136–137, 394; H. Watanabe, *IRE Trans.*, **CT-7** (1960), 296–302; S. Hakimi, *J. Franklin Institute*, **272** (1961), 347–359.

В главах 2 и 3 книги Donald L. Kreher and Douglas R. Stinson *Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search* (CRC Press, 1999), можно найти полезную информацию по всей рассматриваемой теме.

Франк Раски (Frank Ruskey) подготовил книгу *Combinatorial Generation*, которая будет содержать всестороннее рассмотрение комбинаторных вопросов и исчерпывающую библиографию по данной теме. Черновики некоторых глав из этой книги можно найти в Интернете.

Упражнения

Во многих из предлагаемых упражнений от современного читателя требуется найти и/или исправить ошибки в литературе давно минувших дней. И цель отнюдь не в том, чтобы, злорадно ухмыляясь, показать, насколько мы в XXI веке умнее, а в том, чтобы понять, что даже пионеры в некоторой области могут оступаться. Полное понимание того, что множество идей не столь просты, как может показаться сегодняшнему программисту и математику, придет к вам лишь тогда, когда вы обнаружите, как много сил вынуждены были тратить ученые мирового уровня на то, чтобы разобраться с этими новыми концепциями.

1. [*15*] Существует ли понятие “вычислительная техника” в *I Ching*?

► **2.** [*M30*] (*Генетический код.*) Молекулы ДНК представляют собой строки “нуклеотидов” из четырехбуквенного алфавита $\{\mathtt{T}, \mathtt{C}, \mathtt{A}, \mathtt{G}\}$, а большинство молекул белков представляют собой строки “аминокислот” из 20-буквенного алфавита $\{A, C, D, E, F,$

$G, H, I, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, V, W, Y\}$. Три последовательных нуклеотида образуют базовый блок — "кодон", а цепочка $x_1y_1z_1x_2y_2z_2\ldots$ ДНК определяет белок $f(x_1y_1z_1)\,f(x_2y_2z_2)\ldots$, где $f(x,y,z)$ — элемент в строке z и столбце y матрицы x в массиве

$$\begin{pmatrix} F & S & Y & C \\ F & S & Y & C \\ L & S & - & - \\ L & S & - & W \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} L & P & H & R \\ L & P & H & R \\ L & P & Q & R \\ L & P & Q & R \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} I & T & N & S \\ I & T & N & S \\ I & T & K & R \\ M & T & K & R \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} V & A & D & G \\ V & A & D & G \\ V & A & E & G \\ V & A & E & G \end{pmatrix}.$$

(Здесь $(\mathtt{T}, \mathtt{C}, \mathtt{A}, \mathtt{G}) = (1, 2, 3, 4)$; например, $f(\mathtt{CAT})$ представляет собой элемент в строке 1 и столбце 3 матрицы 2, т.е. H.) Кодирование выполняется до тех пор, пока кодон не приведет к останавливающему элементу '–'.

a) Покажите, что существует простой способ сопоставить каждый кодон гексаграмме из *I Ching*, причем 21 возможный выход $\{A, C, D, \ldots, W, Y, -\}$ соответствует 21 *последовательной* гексаграмме в упорядочении (1) Кинг Веня (King Wen).

b) Является ли это открытие сенсационным?

3. [*20*] Какой вид имеет миллионная строфа из 30 тактов в солексном порядке, аналогичном (2)? Каков ранг ⌣⌣⌣—⌣— —⌣⌣⌣⌣— —⌣⌣⌣⌣⌣⌣⌣—⌣—?

4. [*19*] Проанализируйте недочеты списка перестановок Донноло (Donnolo) в табл. 1.

5. [*16*] Где ошибка в списке перестановок пяти нот Кирхера (Kircher) в (7)?

6. [*25*] В своей книге *Traitez de la Voix et des Chants* (1636) Мерсенн (Mersenne) опубликовал таблицу первых 64 факториалов на с. 108–110. Его значение для 64! приближенно равно $\approx 2.2 \times 10^{89}$, хотя на самом деле оно должно быть равно $\approx 1.3 \times \times 10^{89}$. Найдите копию этой книги и выясните, где он ошибся.

7. [*20*] Какие перестановки множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ "живы", а какие "мертвы" в соответствии с правилами Секи (Seki) (8) и (9)?

► **8.** [*M27*] Придумайте исправление, которое нужно внести в правило (9), чтобы процедура Секи стала корректной.

9. [*15*] Получите из (11) арабский способ написания арабских цифр $(0, 1, \ldots, 9)$.

► **10.** [*HM27*] Каково математическое ожидание количества бросков костей в игре Ludus Clericalis для получения всех возможных добродетелей?

11. [*21*] Расшифруйте вертикальную таблицу Луллия на рис. 45 справа. Какие 20 комбинаторных объектов она представляет? *Указание*: не позволяйте опечаткам ввести вас в заблуждение.

12. [*M20*] Свяжите универсальный цикл Шиллингера (Schillinger) (13) с универсальным циклом Пуансо (Poinsot) из упражнения 7.2.1.3–106.

13. [*21*] Что ван Шутен (van Schooten) должен был написать вместо (17)? Приведите также соответствующую таблицу для сочетаний мультимножества $\{a, a, a, b, b, c\}$.

► **14.** [*20*] Завершите последовательность из § 95 *De Combinatione* Изкуэрдо (Izquierdo):

ABC ABD ABE ACD ACE ACB ADE ADB ADC AEB ....

15. [*15*] Если все n-сочетания с повторениями $x_1 \dots x_n$ множества $\{1, \dots, m\}$ перечислены в лексикографическом порядке, причем $x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, то сколько из них начинается с числа j?

16. [*20*] (Нараяна Пандита (Nārāyaṇa Paṇḍita), 1356.) Разработайте алгоритм для генерации всех композиций числа n из частей, не превышающих q, т.е. всех упорядоченных разбиений $n = a_1 + \cdots + a_t$, где $1 \leqslant a_j \leqslant q$ при $1 \leqslant j \leqslant t$ и произвольном значении t. Проиллюстрируйте ваш метод для $n = 7$ и $q = 3$.

17. [*HM27*] Проанализируйте алгоритм из упражнения 16.

18. [*10*] Шуточный вопрос: Лейбниц опубликовал свою *Dissertatio de Arte Combinatoria* в 1666 году. Что особенного в этом году с точки зрения перестановок?

19. [*17*] В какой из строф Путеануса (Puteanus) (20) 'tibi' трактуется как $\smile -$, а не как $\smile\smile$?

20. [*M25*] К визиту трех титулованных особ в Дрезден в 1617 году поэт опубликовал 1617 перестановок гекзаметра

Dant tria jam Dresdæ, ceu sol dat, lumina lucem.

"Трое даны ныне Дрездену, как Солнце дает луч за лучом". [Gregor Kleppis, *Proteus Poeticus* (Leipzig: 1617).] Сколько перестановок этих слов являются гекзаметрами? *Указание*: строфа имеет дактили в первой и пятой стопах, в остальных стопах — спондеи.

21. [*HM30*] Пусть $f(p, q, r; s, t)$ — количество способов получить (o^p, o^q, o^r) путем конкатенации строк $\{s \cdot o, t \cdot oo\}$, где $p + q + r = s + 2t$. Например, $f(2, 3, 2; 3, 2) = 5$, поскольку этими пятью способами являются

$$(o|o,\ o|oo,\ oo)\,,\quad (o|o,\ oo|o,\ oo)\,,\quad (oo,\ o|o|o,\ oo)\,,\quad (oo,\ o|oo,\ o|o)\,,\quad (oo,\ oo|o,\ o|o)\,.$$

a) Покажите, что

$$f(p, q, r; s, t) = \frac{[u^p v^q w^r z^s]1}{(1 - zu - u^2)(1 - zv - v^2)(1 - zw - w^2)}.$$

b) Воспользуйтесь функцией f для подсчета перестановок (19), являющихся гекзаметрами, при дополнительном условии, что пятая стопа не начинается посреди слова.

c) Подсчитайте остальные случаи.

► **22.** [*M40*] Познакомьтесь с решениями задачи о количестве гекзаметров среди перестановок (19), опубликованными Престетом, Уоллисом, Уитвортом и Хартли. Какие ошибки они допустили?

23. [*20*] Какой порядок 52 диаграмм генджи-ко соответствует алгоритму 7.2.1.5H?

► **24.** [*23*] В начале 1800-х годов Тошиаки Хонда (Toshiaki Honda) предложил рекурсивное правило для генерации всех разбиений $\{1, \ldots, n\}$. При $n = 4$ его алгоритм давал такую последовательность разбиений:

Можете ли вы сказать, какой будет последовательность при $n = 5$? *Указание*: см. формулу (26).

25. [*15*] Автора изданной в XVI веке книги *The Arte of English Poesie* интересовали только "полные" в смысле упражнения 7.2.1.5–35 схемы рифм; другими словами, каждая строка должна рифмоваться, как минимум, с одной какой-то другой. Кроме того, схемы должны быть "неприводимы" в смысле упражнения 7.2.1.2–100: разбиение наподобие 12 | 345 можно разделить на двухстрочный стих, за которым следует трехстрочный. Наконец, схема не должна тривиально состоять из строк, которые рифмуются каждая с каждой. Является ли при этих условиях (28) полным списком пятистрочных схем рифм?

► **26.** [*HM25*] Сколько n-строчных схем рифм удовлетворяют ограничениям упражнения 25?

► **27.** [*NM31*] Разбиение множества 14|25|36 может быть представлено диаграммой генджи-ко наподобие  ; однако каждая такая диаграмма для данного разбиения должна иметь, как минимум, три места пересечения линий, а такие пересечения иногда рассматриваются как нежелательные. Сколько разбиений множества $\{1, \ldots, n\}$ имеют диаграммы генджи-ко, в которых линии пересекаются не более одного раза?

► **28.** [*25*] Пусть a, b и c — простые числа. Джон Уоллис (John Wallis) перечислил все возможные разложения a^3b^2c следующим образом: $cbbaaa$, $cbbaa \cdot a$,$bcaaa \cdot b$, $bbaaa \cdot c$, $cbba \cdot aa$, $cbba \cdot a \cdot a$, $cbaa \cdot ba$, $cbaa \cdot b \cdot a$, $bbaa \cdot ca$, $bbaa \cdot c \cdot a$, $caaa \cdot bb$, $caaa \cdot b \cdot b$, $baaa \cdot cb$, $baaa \cdot c \cdot b$, $cbb \cdot aaa$, $cbb \cdot aa \cdot a$, $cbb \cdot a \cdot a \cdot a$, $cba \cdot baa$, $cba \cdot ba \cdot a$, $cba \cdot aa \cdot b$, $cba \cdot b \cdot a \cdot a$, $bba \cdot caa$, $bba \cdot ca \cdot a$, $bba \cdot aa \cdot c$, $bba \cdot c \cdot a \cdot a$, $caa \cdot bb \cdot a$, $caa \cdot ba \cdot b$, $caa \cdot b \cdot b \cdot a$, $baa \cdot cb \cdot a$, $baa \cdot ca \cdot b$, $baa \cdot ba \cdot c$, $baa \cdot c \cdot b \cdot a$, $aaa \cdot cb \cdot b$, $aaa \cdot bb \cdot c$, $aaa \cdot c \cdot b \cdot b$, $cb \cdot ba \cdot aa$, $cb \cdot ba \cdot a \cdot a$, $cb \cdot aa \cdot b \cdot a$, $cb \cdot b \cdot a \cdot a \cdot a$, $bb \cdot ca \cdot aa$, $bb \cdot ca \cdot a \cdot a$, $bb \cdot aa \cdot c \cdot a$, $bb \cdot c \cdot a \cdot a \cdot a$, $ca \cdot ba \cdot ba$, $ca \cdot ba \cdot b \cdot a$, $ca \cdot aa \cdot b \cdot b$, $ca \cdot b \cdot b \cdot a \cdot a$, $ba \cdot ba \cdot c \cdot a$, $ba \cdot aa \cdot c \cdot b$, $ba \cdot c \cdot b \cdot a \cdot a$, $aa \cdot c \cdot b \cdot b \cdot a$, $c \cdot b \cdot b \cdot a \cdot a \cdot a$. Какой алгоритм использовал Уоллис для генерации разложения в данном порядке?

► **29.** [*24*] В каком порядке Уоллис (Wallis) сгенерировал бы все разложения числа $abcde = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$? Ваш ответ должен представлять собой последовательность диаграмм генджи-ко.

30. [*M20*] Чему равен коэффициент $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots z^{m+n}$ в $\left(a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \cdots\right)^m$? (См. формулу (29).)

31. [*20*] Сравните упорядочения разбиений (30) де Муавра (de Moivre) и (31) де Монморта (de Montmort) с алгоритмом 7.2.1.4P.

32. [*21*] (Р.Й. Бошкович (R.J. Boscovich), 1748.) Перечислите все разбиения 20, у которых все части представляют собой 1, 7 или 10. Разработайте алгоритм для перечисления всех таких разбиений заданного целого числа $n > 0$.