

# Г Л А В А

# 4

## Введение в системы дифференциальных уравнений

### 4.1. Системы первого порядка и их приложения

---

В предыдущих главах мы рассматривали методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с одной неизвестной функцией. Однако во многих приложениях встречаются обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие две или больше неизвестных функций, зависящих от одной переменной (обычно от времени). Такие задачи естественно приводят к *системе* обыкновенных дифференциальных уравнений. Обычно мы будем обозначать неизвестные функции, зависящие от переменной  $t$ , через  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , или через  $x, y, z, \dots$ . Штрихами мы будем обозначать производные по  $t$ .

Сосредоточим наше внимание на системах, в которых количество уравнений равно количеству неизвестных функций. Например, систему двух уравнений первого порядка относительно неизвестных функций  $x$  и  $y$  в общем виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t, x, y, x', y') &= 0, \\ g(t, x, y, x', y') &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где функции  $f$  и  $g$  заданы. **Решением** этой системы на некотором интервале значений  $t$  называется пара функций  $x(t), y(t)$  от  $t$ , в результате подстановки которой в оба уравнения эти уравнения превращаются в тождества на этом интервале.

Приведем пример системы уравнений второго порядка. Для этого рассмотрим частицу массой  $m$ , которая движется в пространстве под действием силового поля  $\mathbf{F}$ , зависящего от времени  $t$ , координат  $(x(t), y(t), z(t))$  частицы и ее скорости  $(x'(t), y'(t), z'(t))$ . Записывая второй закон Ньютона  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$  в координатной форме, получим систему

$$\begin{aligned} mx'' &= F_1(t, x, y, z, x', y', z'), \\ my'' &= F_2(t, x, y, z, x', y', z'), \\ mz'' &= F_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{aligned} \tag{2}$$

трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $x, y, z$ , зависящих от независимой переменной  $t$ . Три стоящих с правой стороны функции  $F_1, F_2, F_3$  — компоненты векторнозначной функции  $F$ .

### Простейшие применения

Примеры 1–3 иллюстрируют, каким образом системы дифференциальных уравнений возникают в научных задачах.

**Пример 1** Рассмотрим систему, состоящую из двух тел и двух пружин, изображенную на рис. 4.1.1, причем заданная внешняя сила  $f(t)$  действует на тело массой  $m_2$ , находящееся справа. Обозначим через  $x(t)$  смещение (вправо) тела массы  $m_1$  от его статического положения равновесия (когда система не движется и находится в положении равновесия и, кроме того,  $f(t) = 0$ ), а через  $y(t)$  — смещение тела массой  $m_2$  от его положения равновесия. Таким образом, если  $x$  и  $y$  равны нулю, пружины не являются ни сжатыми, ни растянутыми.

На рис. 4.1.1 первая пружина растянута на  $x$  единиц, а вторая на  $y - x$  единиц. Применив второй закон Ньютона к двум “диаграммам свободных тел”, изображенных на рис. 4.1.2, мы получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1 x'' &= -k_1 x + k_2 (y - x), \\ m_2 y'' &= -k_2 (y - x) + f(t) \end{aligned} \tag{3}$$

с двумя неизвестными функциями  $x(t)$  и  $y(t)$  — смещениями тел; фактические смещения тел должны удовлетворять этой системе уравнений. Например, если  $m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 4, k_2 = 2$ , а  $f(t) = 40 \sin 3t$  в соответствующих физических единицах измерения, то система (3) сводится к

$$\begin{aligned} 2x'' &= -6x + 2y, \\ y'' &= 2x - 2y + 40 \sin 3t. \end{aligned} \tag{4}$$

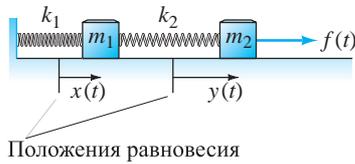


Рис. 4.1.1. Система тел и пружин из примера 1

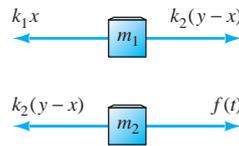
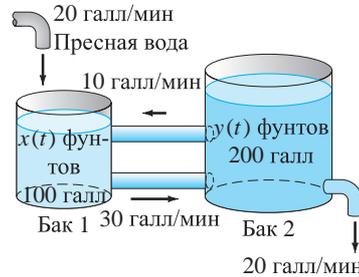


Рис. 4.1.2. “Диаграммы свободных тел” для системы из примера 1

**Пример 2** Два резервуара с раствором соли соединены так, как показано на рис. 4.1.3. Резервуар 1 содержит  $x(t)$  фунтов соли на 100 галлонов воды, а резервуар 2 —  $y(t)$  фунтов соли на 200 галлонов воды. Соляной раствор в каждом



**Рис. 4.1.3.** Два резервуара с раствором соли из примера 2

из резервуаров тщательно перемешивается, и потому раствор можно считать абсолютно однородным. Раствор соли перекачивается из резервуара в резервуар, скорости указаны на рис. 4.1.3. Кроме того, в резервуар 1 со скоростью 20 галлонов/мин вливается пресная вода, а соляной раствор вытекает из резервуара 2 со скоростью 20 галлонов/мин (таким образом, объем раствора в резервуарах остается постоянным). Концентрации соли в резервуарах равны  $x/100$  фунтов на галлон и  $y/200$  фунтов на галлон соответственно. Вычислив скорости изменения количества соли в резервуарах, мы получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} x' &= -30 \cdot \frac{x}{100} + 10 \cdot \frac{y}{200} = -\frac{3}{10}x + \frac{1}{20}y, \\ y' &= 30 \cdot \frac{x}{100} - 10 \cdot \frac{y}{200} - 20 \cdot \frac{y}{200} = \frac{3}{10}x - \frac{3}{20}y; \end{aligned}$$

иными словами,

$$\begin{aligned} 20x' &= -6x + y, \\ 20y' &= 6x - 3y. \end{aligned} \tag{5}$$

### Пример 3

Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 4.1.4. Обозначим через  $I_1(t)$  ток, проходящий в указанном направлении через дроссель (катушку индуктивности)  $L$ , а через  $I_2(t)$  — ток, проходящий через резистор  $R_2$ . Ток, проходящий через резистор  $R_1$  в указанном направлении, равен  $I = I_1 - I_2$ . Согласно закону Кирхгофа для напряжения (алгебраическая) сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре этой цепи равна нулю. Как и в разделе 3.7, напряжения на элементах (всех трех типов) цепи приведены на рис. 4.1.5. Применив закон Кирхгофа к левому замкнутому контуру цепи, получим уравнение

$$2 \frac{dI_1}{dt} + 50(I_1 - I_2) - 100 = 0, \tag{6}$$

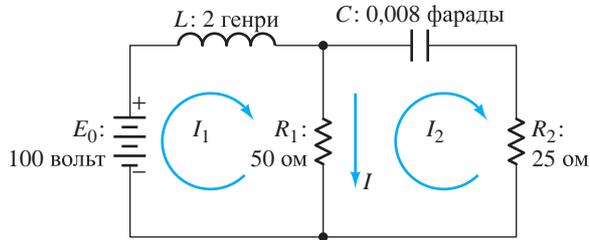


Рис. 4.1.4. Электрическая цепь из примера 3

| Элемент цепи | Падение напряжения на элементе |
|--------------|--------------------------------|
| Дроссель     | $L \frac{dI}{dt}$              |
| Резистор     | $RI$                           |
| Конденсатор  | $\frac{1}{C}Q$                 |

Рис. 4.1.5. Падения напряжения на элементах электрической цепи

так как падение напряжения между отрицательным и положительным полюсами батареи равно  $-100$ . Для правого замкнутого контура цепи получим уравнение

$$125Q_2 + 25I_2 + 50(I_2 - I_1) = 0, \quad (7)$$

где  $Q_2(t)$  — заряд конденсатора. Так как  $dQ_2/dt = I_2$ , дифференцируя обе части уравнения (7), получим уравнение

$$125I_2 + 75 \frac{dI_2}{dt} - 50 \frac{dI_1}{dt} = 0. \quad (8)$$

Разделив обе части уравнений (6) и (8) на 2 и  $-25$  соответственно, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} + 25I_1 - 25I_2 &= 50, \\ 2 \frac{dI_1}{dt} - 3 \frac{dI_2}{dt} - 5I_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять токи  $I_1(t)$  и  $I_2(t)$ . ■

### Системы первого порядка

Предположим, что каждое дифференциальное уравнение системы можно разрешить относительно старшей производной (производной наивысшего порядка) зависимой переменной, входящей в данное уравнение. Иными словами, предположим, что в каждом уравнении старшая производная (т. е. производная наивысшего порядка) зависимых переменных, входящих в уравнение, может быть представлена в виде явной функции от  $t$  и производных зависимых переменных более низких порядков<sup>1</sup>. Например, в случае системы уравнений второго порядка наше предположение эквивалентно тому, что систему можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_1'' &= f_1(t, x_1, x_2, x_1', x_2'), \\ x_2'' &= f_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2'). \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>1</sup> Системы такого вида называются *нормальными системами дифференциальных уравнений*, или просто *нормальными системами*. — Примеч. ред.

Как с практической, так и с теоретической точек зрения очень важно, что любая такая система высшего порядка может быть преобразована в эквивалентную систему уравнений *первого порядка*.

Чтобы описать выполнение такого преобразования, сначала рассмотрим “систему”, состоящую из одного уравнения  $n$ -го порядка

➤ 
$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \tag{11}$$

Введем новые зависимые переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  следующим образом:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'', \quad \dots, \quad x_n = x^{(n-1)}. \tag{12}$$

Заметим, что  $x'_1 = x' = x_2$ ,  $x'_2 = x'' = x_3$  и т. д. Поэтому, подставив равенства (12) в уравнение (11), получим систему

➤ 
$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n, \\ x'_n &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{13}$$

$n$  уравнений *первого порядка*. Очевидно, что эта система эквивалентна исходному уравнению  $n$ -го порядка (11) в том смысле, что функция  $x(t)$  будет решением уравнения (11) тогда и только тогда, когда функции  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , определенные равенствами (12), удовлетворяют системе уравнений (13).

**Пример 4** Уравнение третьего порядка

$$x^{(3)} + 3x'' + 2x' - 5x = \sin 2t$$

можно представить в виде (11), если ввести функцию

$$f(t, x, x', x'') = 5x - 2x' - 3x'' + \sin 2t.$$

Тогда, подставив

$$x_1 = x, \quad x_2 = x' = x'_1, \quad x_3 = x'' = x'_2,$$

получим систему

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= x_3, \\ x'_3 &= 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + \sin 2t \end{aligned}$$

трех уравнений первого порядка. ■

Может показаться, что система уравнений первого порядка, полученная в примере 4, не дает практически никаких преимуществ, так как можно использовать методы главы 3 для

решения исходного (линейного) уравнения третьего порядка. Но предположим, что нужно найти решение нелинейного уравнения

$$x'' = x^3 + (x')^3.$$

Для того чтобы найти решения такого уравнения ни один из известных нам (пока) методов не подходит. Но соответствующая система уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\x_2' &= (x_1)^3 + (x_2)^3.\end{aligned}\tag{14}$$

В разделе 4.3 мы увидим, что существуют достаточно эффективные численные методы для приближения решений по существу всех систем уравнений первого порядка. Поэтому в данном случае переход к системе уравнений первого порядка *будет* полезным. На практике большие системы дифференциальных уравнений высших порядков обычно решаются численными методами с помощью компьютеров. Поэтому первым шагом в поиске решения таких систем является преобразование такой системы в систему первого порядка, для решения которой можно применить существующие компьютерные программы.

**Пример 5**

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}2x'' &= -6x + 2y, \\y'' &= 2x - 2y + 40 \sin 3t\end{aligned}\tag{4}$$

уравнений второго порядка, полученную в примере 1. Преобразуем эту систему в эквивалентную систему уравнений первого порядка.

**Решение** Используя в качестве образца равенства (12), положим

$$x_1 = x, \quad x_2 = x' = x_1', \quad y_1 = y, \quad y_2 = y' = y_1'.$$

Тогда из системы (4) получим систему

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\2x_2' &= -6x_1 + 2y_1, \\y_1' &= y_2, \\y_2' &= 2x_1 - 2y_1 + 40 \sin 3t\end{aligned}\tag{15}$$

четырёх дифференциальных уравнений первого порядка с зависимыми переменными (неизвестными функциями)  $x_1, x_2, y_1$  и  $y_2$ . ■

**Простые двумерные системы**

Линейное уравнение второго порядка

$$x'' + px' + qx = 0\tag{16}$$

с постоянными коэффициентами и независимой переменной  $t$  с помощью подстановок  $x' = y, x'' = y'$  преобразуется в двумерную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -qx - py.\end{aligned}\tag{17}$$

И наоборот, чтобы решить систему (17), достаточно решить уже хорошо знакомое нам уравнение (16).

**Пример 6**

Чтобы найти решение двумерной системы

$$\begin{aligned}x' &= -2y, \\y' &= \frac{1}{2}x,\end{aligned}\tag{18}$$

сначала заметим, что

$$x'' = -2y' = -2\left(\frac{1}{2}x\right) = -x.$$

Отсюда получим одно уравнение второго порядка  $x'' + x = 0$ , общим решением которого является функция

$$x(t) = A \cos t + B \sin t = C \cos(t - \alpha),$$

где  $A = C \cos \alpha$  и  $B = C \sin \alpha$ . Тогда

$$\begin{aligned}y(t) &= -\frac{1}{2}x'(t) = -\frac{1}{2}(-A \sin t + B \cos t) = \\&= \frac{1}{2}C \sin(t - \alpha).\end{aligned}$$

Из тождества  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  следует, что для любого значения  $t$  точка  $(x(t), y(t))$  лежит на эллипсе

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{(C/2)^2} = 1,$$

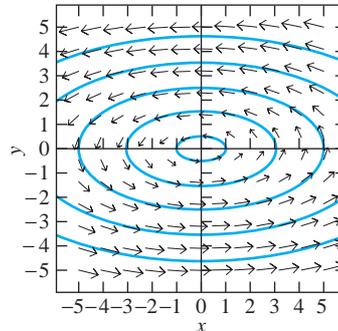
полуоси которого равны  $C$  и  $C/2$ . На рис. 4.1.6 изображено несколько таких эллипсов на плоскости  $xy$ . ■

Решение  $(x(t), y(t))$  двумерной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x, y), \\y' &= g(t, x, y)\end{aligned}$$

можно рассматривать как параметризацию **фазовой траектории** (называемой часто просто **траекторией**) системы на плоскости  $xy$ . Таким образом, траекториями системы (18) будут эллипсы, изображенные на рис. 4.1.6. Выбор начальной точки  $(x(0), y(0))$  однозначно определяет, какую именно из траекторий параметризует частное решение.

Рисунок, изображающий траектории системы на плоскости  $xy$ , называется **фазовым портретом**. Фазовый портрет не дает информации о том, как именно точка  $(x(t), y(t))$  дви-



**Рис. 4.1.6.** Поле направлений и фазовые траектории системы  $x' = -2y$ ,  $y' = \frac{1}{2}x$  из примера 6

жется по своей траектории. Если функции  $f$  и  $g$  не зависят от независимой переменной  $t$ , можно построить **поле направлений**. Поле направлений обычно изображается стрелками, которые изображают векторы, компоненты которых пропорциональны производным  $x' = f(x, y)$  и  $y' = g(x, y)$ . Так как вектор скорости движущейся точки  $(x(t), y(t))$  равен  $(x'(t), y'(t))$ , поле направлений указывает направление, в котором движется точка по своей траектории. Например, поле направлений, изображенное на рис. 4.1.6 показывает, что каждая точка движется по своей эллиптической траектории против часовой стрелки. Дополнительная информация может быть получена с помощью построения отдельных графиков<sup>2</sup>  $x(t)$  и  $y(t)$ , как функций, зависящих от переменной  $t$ .

<sup>2</sup> Используя механическое истолкование нормальной системы, говорят, что решению системы соответствует *движение точки* в пространстве, координатами которого служат независимое переменное (время) и искомые функции. Таким образом, в соответствии с механическим истолкованием нормальной системы, интегральная кривая называется *движением*. Само пространство, координатами которого служат искомые функции, называется *фазовым пространством*. Если фазовое пространство двумерно, оно, естественно, называется *фазовой плоскостью*. Кривая, описываемая в фазовом пространстве движущейся точкой, естественно, называется *траекторией*. Взаимосвязь между траекторией и движением состоит в том, что *траектория есть проекция движения* (оно расположено в пространстве, координатами которого служат независимое переменное и зависимые переменные) в пространство, координатами которого служат зависимые переменные. Решение (в механической интерпретации называемое *движением*) не только определяет траекторию как геометрическое место точек, но, определяя положение точки на траектории в любой момент времени, показывает, *как* происходит движение точки по траектории с течением времени. Это и неудивительно, поскольку движение (интегральная кривая) расположено в пространстве, размерность которого на единицу больше размерности пространства, в котором расположена траектория. Поскольку интегральная кривая (движение) и траектория расположены в пространствах разных размерностей (и сами имеют разные размерности, отличающиеся на единицу!), совершенно очевидно, что, строго говоря, траектория и интегральная кривая (движение) — совершенно разные вещи! Впрочем, строгостью этой некоторые англоязычные авторы иногда пренебрегают, поскольку траекторию (trajectory) часто называют также solution curve (что иногда подразумевает интегральную кривую). Но в любом конкретном случае из контекста понятно, что имеется в виду. Чтобы убедиться в этом, еще раз взгляните на рис. 4.1.6 и, закрыв подрисуючную подпись, ответьте, что там изображено — интегральные кривые или траектории. (*Подсказка.* Конечно, в переводе книги в подрисуючной подписи указано, что именно там изображено. Но даже в математических (не говоря уже о других, например, исторических) книгах не следует слепо доверять написанному. В данном случае такая проверка весьма полезна — она позволит лучше разобраться в понятиях интегральной кривой и траектории. Посчитайте размерности пространств, в которых лежат траектории и интегральные кривые. Размерность изображенных на рис. 4.1.6 объектов (плоских кривых — эллипсов) чуть-чуть маловата для интегральных кривых указанной там нормальной системы, не правда ли? Значит, там изображены ... (ответьте самостоятельно). Теперь откройте подрисуючную подпись и сверьте свой ответ.) — *Примеч. ред.*

**Пример 6**

Продолжение

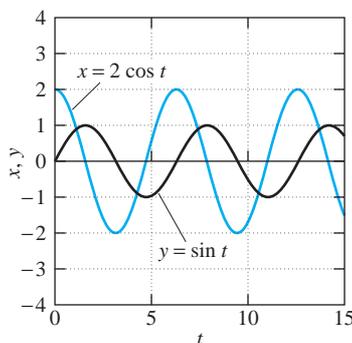
Подставив начальные значения  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 0$  в общее решение уравнения из примера 6, получим

$$x(0) = A = 2, \quad y(0) = -\frac{1}{2}B = 0.$$

Значит, искомым частным решением является пара функций

$$x(t) = 2 \cos t, \quad y(t) = \sin t.$$

Графики этих двух функций изображены на рис. 4.1.7. Мы видим, что сначала  $x(t)$  убывает, а  $y(t)$  возрастает. Отсюда следует, что с ростом  $t$  точка решения  $(x(t), y(t))$  движется по траектории  $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$  против часовой стрелки, как и указывает поле направлений, изображенное на рис. 4.1.6. ■



**Рис. 4.1.7.** Графики компонентов решения задачи Коши (задачи с начальными условиями)  $x' = -2y$ ,  $y' = \frac{1}{2}x$ ,  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 0$ , т. е. графики функций  $x$  и  $y$ , являющихся компонентами параметрического представления фазовой траектории

**Пример 7**

Чтобы найти общее решение системы уравнений

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= 2x + y, \end{aligned} \tag{19}$$

вначале заметим, что

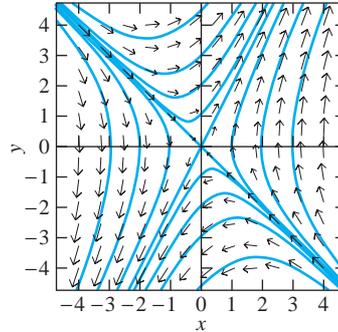
$$x'' = y' = 2x + y = x' + 2x.$$

Отсюда получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' - x' - 2x = 0$$

с характеристическим уравнением

$$r^2 - r - 2 = (r + 1)(r - 2) = 0$$



**Рис. 4.1.8.** Поле направлений и фазовые траектории системы  $x' = y, y' = 2x + y$  из примера 7

и общим решением

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{2t}. \quad (20)$$

Тогда

$$y(t) = x'(t) = -Ae^{-t} + 2Be^{2t}. \quad (21)$$

Типичные траектории на фазовой плоскости системы уравнений (19), параметрическое задание которых определено уравнениями (20) и (21), изображены на рис. 4.1.8. Дальнейшее исследование этих траекторий выполняется в задаче 23. ■

### Пример 8

Чтобы решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= (1,01)x - (0,2)y, \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = -1, \end{aligned} \quad (22)$$

вначале заметим, что

$$x'' = -y' = -[(1,01)x - (0,2)y] = (-1,01)x - (0,2)x'.$$

Отсюда получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' + (0,2)x' + (1,01)x = 0$$

с характеристическим уравнением

$$r^2 + (0,2)r + 1,01 = (r + 0,1)^2 + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения равны  $-0,1 \pm i$ , а его общее решение представляет собой функцию

$$x(t) = e^{-t/10}(A \cos t + B \sin t).$$

Тогда  $x(0) = A = 0$ , откуда

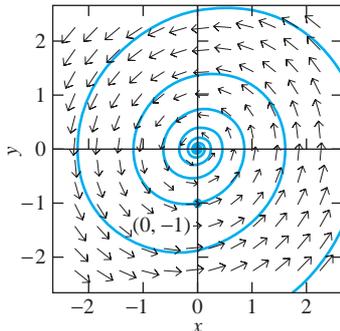
$$x(t) = Be^{-t/10} \sin t,$$

$$y(t) = -x'(t) = \frac{1}{10}Be^{-t/10} \sin t - Be^{-t/10} \cos t.$$

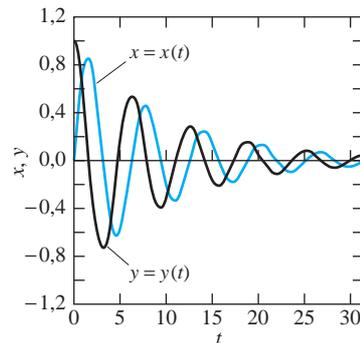
Наконец,  $y(0) = -B = -1$ . Поэтому искомое решение системы (22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t/10} \sin t, \\ y(t) &= \frac{1}{10}e^{-t/10}(\sin t - 10 \cos t). \end{aligned} \quad (23)$$

Эти уравнения задают параметрическое представление траектории, которая в данном примере представляет собой спираль, изображенную на рис. 4.1.9. Траектория стремится к началу координат при  $t \rightarrow +\infty$ . На рис. 4.1.10 изображены графики компонент решения задачи Коши (задачи с начальными условиями), т. е. графики функций  $x$  и  $y$ , заданных равенствами (23); эти-то функции и являются компонентами параметрического представления фазовой траектории. ■



**Рис. 4.1.9.** Поле направлений и фазовая траектория системы  $x' = -y$ ,  $y' = (1,01)x - (0,2)y$  из примера 8



**Рис. 4.1.10.** Графики компонент решения задачи Коши (задачи с начальными условиями), т. е. графики функций  $x$  и  $y$ , являющихся компонентами параметрического представления фазовой траектории из примера 8

Почему у таких очень похожих систем дифференциальных уравнений в примерах 6–8 траектории, изображенные на рис. 4.1.6, 4.1.8 и 4.1.9, столь сильно отличаются? На этот вопрос мы дадим ответ при более глубоком изучении линейных систем в главе 5.

### Линейные системы

На практике с помощью численных методов проще найти приближенное решение системы дифференциальных уравнений первого порядка, чем системы высшего порядка. Но не только этим практическим соображением определяются преимущества систем первого порядка. Общей теории систем дифференциальных уравнений, да и систематическим методам их решения, можно придать более простой и более краткий вид, если ограничиться системами

первого порядка. (Все необходимые результаты для систем высшего порядка легче получить, рассматривая их как сводящиеся к системам первого порядка.) Рассмотрим, например, *линейную* систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\&\vdots \\x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t).\end{aligned}\tag{24}$$

Эта система называется **однородной**, если все функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  тождественно равны нулю; в противном случае эта система называется **неоднородной**. Согласно этому определению, система (5) является однородной, а линейная система (15) — неоднородная. Система (14) не относится к линейным, так как правая часть второго уравнения не является линейной функцией относительно неизвестных функций  $x_1$  и  $x_2$ .

**Решением** системы уравнений (24) назовем кортеж из  $n$  функций  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , которые (на некотором интервале) тождественно удовлетворяют каждому из уравнений (24)<sup>3</sup>. Мы увидим, что общая теория систем  $n$  линейных дифференциальных уравнений первого порядка во многом схожа с общей теорией одного линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. Теорема 1, доказанная в приложении, похожа на теорему 2 из раздела 3.2. В ней идет речь о том, что если коэффициенты системы (24) — функции  $p_{ij}$  и  $f_j$ , непрерывны, то система имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным данным.

|                  |  |
|------------------|--|
| <b>Теорема 1</b> | <b>Существование решения линейной системы и его единственность</b> |
|------------------|--|

Предположим, что функции  $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}$  и функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  непрерывны на открытом интервале  $I$ , содержащем точку  $a$ . Тогда для заданных  $n$  чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$  система (24) имеет единственное на интервале  $I$  решение, которое удовлетворяет  $n$  начальным условиям

$$x_1(a) = b_1, \quad x_2(a) = b_2, \quad \dots, \quad x_n(a) = b_n.\tag{25}$$



Следовательно, для определения какого-нибудь конкретного решения системы  $n$  линейных дифференциальных уравнений первого порядка необходимы  $n$  начальных условий. Поэтому стоит ожидать, что общее решение такой системы будет включать  $n$  произвольных постоянных. Например, в примере 5 мы видели, что система линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}2x'' &= -6x + 2y, \\y'' &= 2x - 2y + 40 \sin 3t,\end{aligned}$$

которая описывает зависимость координат  $x(t)$  и  $y(t)$  из примера 1 от времени, эквивалентна системе *четырех* линейных уравнений первого порядка (15). Следовательно, для определения движения системы из двух тел в примере 1 необходимо иметь четыре начальных условия.

<sup>3</sup> Кортеж из  $n$  объектов математики часто называют *энкой*. Поэтому можно сказать, что **решением** системы дифференциальных уравнений с  $n$  неизвестными функциями называется *энка функций*, которые (на некотором интервале) тождественно удовлетворяют каждому из уравнений данной системы. — Примеч. ред.

Стандартные начальные условия: начальные положения тел  $x(0)$  и  $y(0)$  и начальные их скорости  $x'(0)$  и  $y'(0)$ . Еще один пример: количество соли  $x(t)$  и  $y(t)$  в резервуарах в примере 2 описывается системой

$$\begin{aligned} 20x' &= -6x + y, \\ 20y' &= 6x - 3y \end{aligned}$$

двух линейных уравнений первого порядка. Поэтому для определения решения достаточно двух начальных значений  $x(0)$  и  $y(0)$ . Чтобы определить необходимое (для единственности решения) количество начальных условий заданной системы высшего порядка, часто ее необходимо преобразовать в эквивалентную систему первого порядка. Согласно теореме 1, количество таких условий равно количеству уравнений в эквивалентной системе первого порядка.

### 4.1. Задачи

В задачах 1–10 преобразуйте данное дифференциальное уравнение или систему в эквивалентную систему дифференциальных уравнений первого порядка.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $x'' + 3x' + 7x = t^2$   | 2. $x^{(4)} + 6x'' - 3x' + x = \cos 3t$       |
| 3. $t^2x'' + tx' + (t^2 - 1)x = 0$  | 4. $t^3x^{(3)} - 2t^2x'' + 3tx' + 5x = \ln t$ |
| 5. $x^{(3)} = (x')^2 + \cos x$  | 6. $x'' - 5x + 4y = 0, y'' + 4x - 5y = 0$     |
| 7. $x'' = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, y'' = -\frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ |   |
| 8. $x'' + 3x' + 4x - 2y = 0, y'' + 2y' - 3x + y = \cos t$                     |   |
| 9. $x'' = 3x - y + 2z, y'' = x + y - 4z, z'' = 5x - y - z$                    |   |
| 10. $x'' = (1 - y)x, y'' = (1 - x)y$  |   |

В задачах 11–20, используя метод, примененный в примерах 6, 7 и 8, найдите общие решения систем. Если заданы начальные условия, найдите удовлетворяющее им частное решение. В каждой задаче с помощью компьютерной системы или графического калькулятора постройте поле направлений и типичные фазовые траектории данной системы.

- |  |   |
|--|---|
| 11. $x' = y, y' = -x$                            | 12. $x' = y, y' = x$                              |
| 13. $x' = -2y, y' = 2x; x(0) = 1, y(0) = 0$      | 14. $x' = 10y, y' = -10x; x(0) = 3, y(0) = 4$     |
| 15. $x' = \frac{1}{2}y, y' = -8x$                | 16. $x' = 8y, y' = -2x$                           |
| 17. $x' = y, y' = 6x - y; x(0) = 1, y(0) = 2$    | 18. $x' = -y, y' = 10x - 7y; x(0) = 2, y(0) = -7$ |
| 19. $x' = -y, y' = 13x + 4y; x(0) = 0, y(0) = 3$ |   |
| 20. $x' = y, y' = -9x + 6y$                      |   |
21. (a) Вычислите  $[x(t)]^2 + [y(t)]^2$  и покажите, что траектории системы  $x' = y, y' = -x$  из задачи 11 представляют собой круги. (b) Вычислите  $[x(t)]^2 - [y(t)]^2$ , чтобы показать, что траектории системы  $x' = y, y' = x$  из задачи 12 представляют собой гиперболы.
22. (a) Начав с общего решения системы  $x' = -2y, y' = 2x$  из задачи 13, вычислите  $x^2 + y^2$ , чтобы показать, что траектории системы представляют собой окружности. (b) Аналогично покажите, что траектории системы  $x' = \frac{1}{2}y, y' = -8x$  из задачи 15 представляют собой эллипсы, заданные уравнением  $16x^2 + y^2 = C^2$ .

23. Сначала выразите из уравнений (20) и (21)  $e^{-t}$  и  $e^{2t}$  через  $x(t)$ ,  $y(t)$  и постоянные  $A$  и  $B$ . Затем подставьте полученные выражения в тождество  $(e^{2t})(e^{-t})^2 = 1$  и тем самым покажите, что траектории системы  $x' = y$ ,  $y' = 2x + y$  из примера 7 удовлетворяют уравнению в виде

$$4x^3 - 3xy^2 + y^3 = C \quad (\text{постоянная}).$$

Затем покажите, что при значении постоянной  $C = 0$  получаются прямые  $y = -x$  и  $y = 2x$ , изображенные на рис. 4.1.8.

24. Выведите уравнения

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2, \\ m_2 x_2'' &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 \end{aligned}$$

которым удовлетворяют смещения (от положения равновесия) двух тел, изображенных на рис. 4.1.11.

25. Две частицы, масса каждой из которых равна  $m$ , закреплены на струне, к которой приложено постоянное растягивающее усилие  $T$  (рис. 4.1.12). Предположим, что частицы колеблются вертикально (т. е. параллельно оси  $y$ ), причем амплитуды колебаний настолько малы, что синусы изображенных углов приблизительно равны их тангенсам. Покажите, что смещения  $y_1$  и  $y_2$  удовлетворяют уравнениям

$$ky_1'' = -2y_1 + y_2, \quad ky_2'' = y_1 - 2y_2,$$

где  $k = mL/T$ .

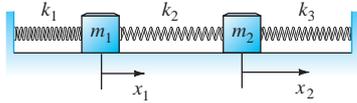


Рис. 4.1.11. Система тел из задачи 24

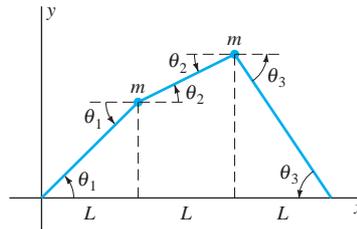


Рис. 4.1.12. Механическая система из задачи 25

26. Три бродильных чана на 100 галлонов соединены так, как показано на рис. 4.1.13. Смеси в каждом из резервуаров тщательно перемешиваются и потому всегда однородны. Обозначим через  $x_i(t)$  количество (в фунтах) алкоголя в резервуаре  $T_i$  в момент времени  $t$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Предположим, что смесь циркулирует между резервуарами со скоростью 10 галлонов/мин. Выведите уравнения

$$10x_1' = -x_1 + x_3,$$

$$10x_2' = x_1 - x_2,$$

$$10x_3' = x_2 - x_3.$$

27. Выведите систему дифференциальных уравнений первого порядка для токов в электрической цепи, показанной на рис. 4.1.14.
28. Решите задачу 27 при условии, что генератор заменен на батарею, электродвижущая сила которой равна 100 В, а катушка индуктивности заменена конденсатором емкостью 1 микрофарада (мФ).

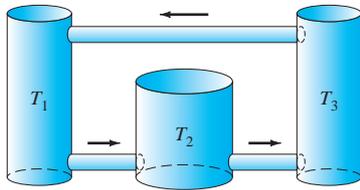


Рис. 4.1.13. Бродильные чаны из задачи 26

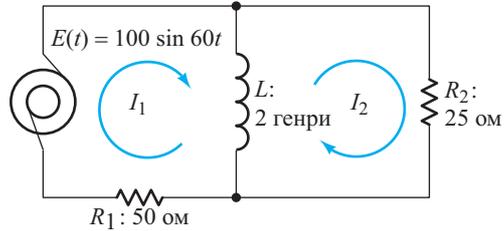


Рис. 4.1.14. Электрическая цепь из задачи 27

29. Частица массы  $m$ , координаты которой обозначены через  $(x(t))$  и  $y(t)$ , движется в плоскости под действием силового поля, в котором сила направлена в начало координат, а ее величина равна  $k/(x^2 + y^2)$ . (Таким образом, данное силовое поле является центрально-симметричным, причем центральная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между точкой и центром силы, который совпадает с началом координат.) Покажите, что

$$mx'' = -\frac{kx}{r^3} \quad \text{и} \quad my'' = -\frac{ky}{r^3},$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

30. Предположим, что снаряд массой  $m$  движется в вертикальной плоскости в атмосфере возле поверхности Земли под действием двух сил — направленной вниз силы тяготения, величина которой равна  $mg$ , и силы сопротивления  $\mathbf{F}_R$  (направленной противоположно вектору скорости  $\mathbf{v}$ ), величина которой равна  $kv^2$  (где  $v = |\mathbf{v}|$  — скорость снаряда; рис. 4.1.15). Покажите, что уравнения движения снаряда имеют вид

$$mx'' = -kvx', \quad my'' = -kvy' - mg,$$

где  $v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ .

31. Предположим, что частица, масса которой равна  $m$ , а электрический заряд равен  $q$ , движется в плоскости  $xy$  под действием магнитного поля  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$  (это однородное поле, параллельное оси  $z$ ), так что сила, действующая на частицу, равна  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости. Покажите, что уравнения движения частицы имеют вид

$$mx'' = +qBy', \quad my'' = -qBx'.$$

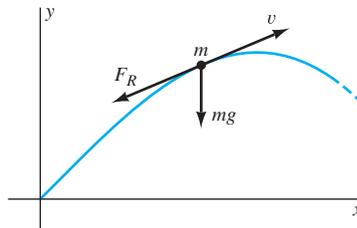


Рис. 4.1.15. Траектория снаряда из задачи 30

## 4.1. Приложение. Гравитация и движение планет, законы Кеплера

В начале XVII столетия<sup>4</sup> Иоганн Кеплер проанализировал результаты наблюдения движения планет, которые были выполнены датским астрономом Тихо Браге<sup>5</sup>. Кеплер сделал вывод, что движение планет вокруг Солнца определяется следующими тремя **законами движения планет**, которые теперь называются **законами Кеплера**.

1. Орбита каждой планеты представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, описывает (заметает) площадь, пропорциональную времени движения планеты<sup>6</sup>.
3. Квадрат периода обращения планеты вокруг Солнца пропорционален кубу большей полуоси ее эллиптической орбиты<sup>7</sup>.

В своих *Началах* (*Principia Mathematica*, 1687) Исаак Ньютон вывел из законов Кеплера закон всемирного тяготения, согласно которому сила притяжения между двумя телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. В этом приложении мы покажем, как из закона тяготения, открытого Ньютоном, вывести первые два закона Кеплера<sup>8</sup>.

Предположим, что Солнце расположено в начале координат плоскости движения планеты<sup>9</sup>. Запишем радиус-вектор планеты в виде

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{i} = (1, 0)$  и  $\mathbf{j} = (0, 1)$  — единичные векторы осей  $x$  и  $y$ . Согласно закону всемирного тяготения, сила притяжения между двумя телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и потому (задача 29) вектор ускорения планеты  $\mathbf{r}''(t)$  задается равенством

$$\mathbf{r}'' = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние от Солнца до планеты. Если полярные координаты планеты в момент времени  $t$  равны  $(r(t), \theta(t))$ , то единичный полярный радиус (единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора), и перпендикулярный ему единичный вектор (они

<sup>4</sup> Примерно в 1609–1619 годах. — *Примеч. ред.*

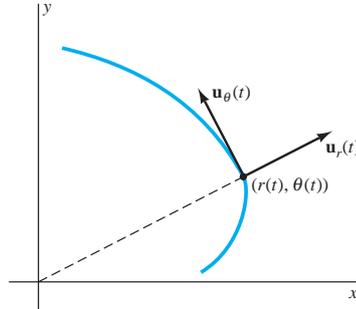
<sup>5</sup> Тихо Браге родился в Кнудструпте 14 декабря 1546 года, а умер 24 октября 1601 года в Праге. Значительную часть своей жизни посвятил определению положения звезд и планет. Его наблюдения были наиболее точными до изобретения телескопа. Кроме того, его работы способствовали развитию тригонометрии. — *Примеч. ред.*

<sup>6</sup> Иными словами, секторная скорость каждой планеты относительно Солнца постоянна. — *Примеч. ред.*

<sup>7</sup> Иными словами, отношение квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей их орбит постоянно и для всех планет одинаково. — *Примеч. ред.*

<sup>8</sup> Задача, в которой требуется найти орбиты двух тел, силы взаимодействия между которыми определяются законом обратных квадратов, называется *задачей Кеплера*. Задачу Кеплера решил Исаак Ньютон. — *Примеч. ред.*

<sup>9</sup> Данное движение является плоским. Это следует из того, что движение происходит под действием центральной силы и *теоремы об изменении момента количества движения: производная по времени от момента*



**Рис. 4.1.16.** Единичный полярный радиус  $\mathbf{u}_r$  и перпендикулярный ему единичный вектор  $\mathbf{u}_\theta$

изображены на рис. 4.1.16) соответственно равны<sup>10</sup>

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta. \quad (3)$$

Единичный полярный радиус  $\mathbf{u}_r$ , приложенный к планете, всегда направлен от начала координат, а перпендикулярный ему единичный вектор  $\mathbf{u}_\theta$  получается из него вращением  $\mathbf{u}_r$  против часовой стрелки на  $90^\circ$ .

**Шаг 1.** Продифференцируйте уравнения (3) покомпонентно и покажите, что

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_r \frac{d\theta}{dt}. \quad (4)$$

*количества движения материальной точки равна моменту равнодействующей сил, приложенных к ней.* (Конечно, момент количества движения и момент равнодействующей нужно брать относительно одного и того же центра моментов.) Эта теорема часто называется также *теоремой моментов количества движения*. Теперь докажем, что *при движении материальной точки под действием центральной силы траектория движения есть плоская кривая*. Для этого удобно применить теорему об изменении момента количества движения, выбрав в качестве центра моментов центр отталкивания или притяжения — ту фиксированную точку пространства, через которую всегда проходит линия действия заданной центральной силы. Действительно, по теореме об изменении момента количества движения, производная по времени от момента количества движения материальной точки равна моменту равнодействующей сил, приложенных к ней. А момент равнодействующей сил, равный векторному произведению радиуса-вектора на силу, в случае центральной силы равен нулю, поскольку центральная сила коллинеарна радиусу-вектору. Значит, сам вектор момента количества движения  $\mathbf{G}$  постоянен. (Равенство  $\mathbf{G} = \mathbf{C} = \text{const}$  в теоретической механике часто называется *первым интегралом дифференциальных уравнений движения в векторном виде*. Вектор  $\mathbf{C}$  — постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.) Поскольку момент  $\mathbf{G} = [m\mathbf{r}, \mathbf{v}]$  перпендикулярен радиус-вектору  $\mathbf{r}$ , то их скалярное произведение равно нулю. А так как скалярное произведение  $\mathbf{G}\mathbf{r} = 0$ , то движение происходит в плоскости, векторное уравнение которой имеет вид  $\mathbf{G}\mathbf{r} = 0$ . (Ведь  $\mathbf{G} = \mathbf{C} = \text{const}$ , и, значит,  $\mathbf{G}\mathbf{r} = 0$  — уравнение плоскости.) Эта плоскость проходит через начало координат, ее нормаль коллинеарна вектору  $\mathbf{G}$ , а сама плоскость перпендикулярна вектору  $\mathbf{G}$ . Утверждение доказано. Остается заметить еще, что координатная запись уравнения плоскости  $\mathbf{G}\mathbf{r} = 0$  называется *вторым интегралом дифференциальных уравнений движения*. — *Примеч. ред.*

<sup>10</sup> Иными словами, векторы  $\mathbf{u}_r$  и  $\mathbf{u}_\theta$  являются ортами полярной системы координат. — *Примеч. ред.*

**Шаг 2.** Используя уравнения (4), продифференцируйте радиус-вектор планеты  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$  и таким образом покажите, что ее вектор скорости равен

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta. \quad (5)$$

**Шаг 3.** Продифференцировав еще раз, покажите, что вектор ускорения планеты  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  равен

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \mathbf{u}_\theta. \quad (6)$$

**Шаг 4.** Радиальные и перпендикулярные компоненты в правых частях уравнений (2) и (6) должны совпадать. Приравняв перпендикулярные к радиус-вектору компоненты, получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0, \quad (7)$$

откуда следует, что

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h, \quad (8)$$

где  $h$  — постоянная. Элемент площади в полярных координатах, который позволяет вычислить площадь  $A(t)$ , заштрихованную на рис. 4.1.17, равен  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ . Поэтому из уравнения (8) следует, что производная  $A'(t)$  постоянна, а это и есть второй закон Кеплера<sup>11</sup>.

**Шаг 5.** Приравняйте радиальные компоненты уравнений (2) и (6), а затем с помощью равенства (8), покажите, что расстояние планеты от начала координат (радиальная координатная функция)  $r(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

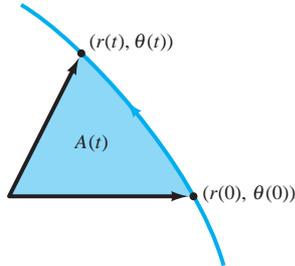
$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}. \quad (9)$$

**Шаг 6.** Предположив, что уравнение орбиты можно записать в полярных координатах<sup>12</sup> в виде  $r = r(\theta)$ , используя цепное правило и уравнение (8), покажите, что если  $r = 1/z$ , то

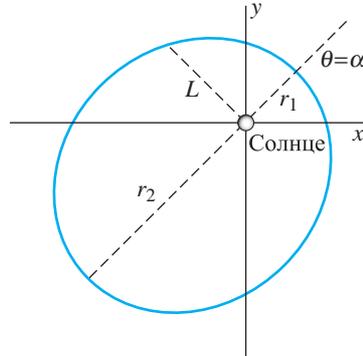
$$\frac{dr}{dt} = -h \frac{dz}{d\theta}.$$

<sup>11</sup> Поскольку момент количества движения материальной точки равен удвоенной массе точки, умноженной на вектор секторной скорости, то из постоянства момента количества движения материальной точки (первый интеграл дифференциальных уравнений движения в векторном виде) следует постоянство вектора секторной скорости. А поскольку секторная скорость измеряется плоскостным элементом, заштрихованным радиусом-вектором, то отсюда следует *теорема площадей*: если материальная точка движется под действием центральной силы, то ее секторная скорость — постоянный вектор. Вот эквивалентная формулировка этой теоремы: при движении материальной точки под действием центральной силы ее радиус-вектор за любые одинаковые промежутки времени описывает одинаковые плоскостные элементы. Второй закон Кеплера является частным случаем теоремы площадей. (Заметьте, что и первый, и второй интегралы дифференциальных уравнений движения были получены лишь в предположении, что на материальную точку действует центральная сила; конкретный вид этой силы при выводе интегралов не имеет значения.) — *Примеч. ред.*

<sup>12</sup> Мы уже вывели закон площадей  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$ . Поскольку полярный радиус положителен, то из закона площадей следует, что полярный угол изменяется монотонно, если  $h \neq 0$ . А тогда (по теореме о неявной функции) функция, выражающая зависимость полярного угла от времени, т. е. функция  $\theta = \theta(t)$ , имеет обратную функцию  $t = t(\theta)$ . Из этого немедленно следует, что траектория движения может быть представлена в полярных координатах уравнением вида  $r = r(\theta)$ . — *Примеч. ред.*



**Рис. 4.1.17.** Площадь, которую описывает (замечает) радиус-вектор



**Рис. 4.1.18.** Эллиптическая орбита

$$r = \frac{L}{1 + e \cos(\theta - \alpha)},$$

перигелий которой равен  $r_1 = L/(1 + e)$ ,  
а афелий —  $r_2 = L/(1 - e)$

Продифференцировав еще раз, с помощью уравнения (9) покажите, что функция  $z(\theta) = 1/r(\theta)$  удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}. \quad (10)$$

**Шаг 7.** Покажите, что уравнение (10) имеет общее решение

$$z(\theta) = A \sin \theta + B \cos \theta + \frac{k}{h^2}. \quad (11)$$

**Шаг 8.** Наконец, из уравнения (11) выведите, что  $r(\theta) = 1/z(\theta)$  выражается формулой

$$r(\theta) = \frac{L}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}, \quad (12)$$

где  $e = Ch^2/k$ ,  $C \cos \alpha = A$ ,  $C \sin \alpha = B$  и  $L = h^2/k$ . График уравнения (12) в полярных координатах представляет собой коническое сечение, эксцентриситет которого равен  $e$ . Это коническое сечение с фокусом в начале координат является эллипсом при  $0 \leq e < 1$ , параболой — при  $e = 1$  и гиперболой — при  $e > 1$ . Орбиты планет расположены в ограниченной области (движения планет *финитны*) и, следовательно, являются эллипсами с эксцентриситетом  $e < 1$ . Как показано на рис. 4.1.18, большая ось эллипса лежит на прямой  $\theta = \alpha$ .

**Шаг 9.** Постройте несколько стандартных эллиптических орбит, заданных уравнением (12) при различных значениях эксцентриситета, размерах и ориентациях. Чтобы построить эллиптическую орбиту, эксцентриситет которой равен  $e$ , а половина фокального параметра —  $L$  (рис. 4.1.18), повернутую на угол  $\alpha$ , можно воспользоваться ее параметрическим



**Рис. 4.1.19.** Форма орбиты кометы Галлея

заданием в прямоугольных декартовых координатах

$$x(t) = r(t) \cos t, \quad y(t) = r(t) \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Эксцентриситет орбиты Земли приблизительно равен  $e \approx 0,0167$ , т. е. настолько близок к нулю, что орбита является практически круговой (но Солнце находится в фокусе, а не в центре), а значения эксцентриситетов орбит других планет варьируются от 0,0068 — для Венеры и 0,0933 — для Марса, до 0,2056 — для Меркурия и 0,2486 — для Плутона. Однако эксцентриситет орбит многих комет значительно больше. Например, эксцентриситет орбиты кометы Галлея  $e \approx 0,97$  (рис. 4.1.19)<sup>13</sup>.

## 4.2. Метод исключения

Самый простой подход к решению систем линейных дифференциальных уравнений состоит в исключении неизвестных функций с помощью сложения двух уравнений, предварительно умноженных на подходящие множители. Цель этой процедуры — последовательное исключение неизвестных функций до тех пор, пока не останется лишь одно уравнение, содержащее лишь одну неизвестную функцию. Это оставшееся уравнение обычно будет линейным уравнением высшего порядка и часто может быть решено методами, описанными в главе 3. После того как его решение найдено, другие неизвестные функции можно найти по очереди, используя либо первоначальные дифференциальные уравнения системы, либо полученные в процессе исключения неизвестных.

**Метод исключения переменных** для систем линейных дифференциальных уравнений аналогичен методу решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью процесса исключения переменных по одной до тех пор, пока не останется лишь одна неизвестная и одно уравнение. Он удобнее всего при решении достаточно малых систем: тех, которые состоят не более чем из двух-трех уравнений. Для таких систем метод исключения является простым и четким подходом, не требующим обширных предварительных знаний и громоздких вычислений. Но для больших систем дифференциальных уравнений, как и для теоретического изучения, более удобными являются матричные методы, рассматриваемые в главе 5.

**Пример 1** Найдем частное решение системы

$$x' = 4x - 3y, \quad y' = 6x - 7y, \quad (1)$$

которое удовлетворяет начальным данным  $x(0) = 2, y(0) = -1$ .

<sup>13</sup> Изложенный выше метод решения задачи двух тел с физической точки зрения содержит некоторые упрощения. Не учитывается, например, притяжение Солнца планетой. С учетом этого притяжения задачу двух тел можно решить, сведя ее к только что решенной нами задаче о движении одного тела. Для этого необходимо рассматривать центр масс системы двух тел и их *приведенную массу*. — *Примеч. ред.*

**Решение** Решив второе уравнение системы (1) относительно  $x$ , получим

$$x = \frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y, \quad (2)$$

откуда

$$x' = \frac{1}{6}y'' + \frac{7}{6}y'. \quad (3)$$

Теперь подставим эти выражения для  $x$  и  $x'$  в первое уравнение системы (1); получим

$$\frac{1}{6}y'' + \frac{7}{6}y' = 4\left(\frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y\right) - 3y,$$

откуда после упрощения

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

Характеристическое уравнение этого линейного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$r^2 + 3r - 10 = (r - 2)(r + 5) = 0,$$

так что общее решение дифференциального уравнения второго порядка представляет собой функцию

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}. \quad (4)$$

Теперь, подставив (4) в (2), получим

$$x(t) = \frac{1}{6}(2c_1 e^{2t} - 5c_2 e^{-5t}) + \frac{7}{6}(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t});$$

иными словами,

$$x(t) = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}c_2 e^{-5t}. \quad (5)$$

Равенства (4) и (5) задают общее решение системы (1).

Из заданных начальных условий следует, что

$$x(0) = \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 2$$

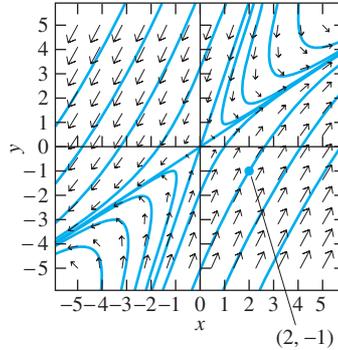
и что

$$y(0) = c_1 + c_2 = -1;$$

несложно решить эту систему уравнений и найти, что  $c_1 = 2$  и  $c_2 = -3$ . Следовательно, искомое решение представляет собой пару функций

$$x(t) = 3e^{2t} - e^{-5t}, \quad y(t) = 2e^{2t} - 3e^{-5t}.$$

На рис. 4.2.1 изображены эта и другие фазовые траектории, параметрические уравнения которых суть  $x(t) = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}c_2 e^{-5t}$ ,  $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}$  при различных значениях постоянных  $c_1$  и  $c_2$ . Это два семейства кривых, которые напоминают гиперболы с одной и той же парой асимптот, пересекающихся под углом, отличным от прямого. ■



**Рис. 4.2.1.** Поле направлений и фазовые траектории системы  $x' = 4x - 3y$ ,  $y' = 6x - 7y$  из примера 1

**Замечание.** Общее решение, заданное равенствами (4) и (5), можно рассматривать, как пару или вектор  $(x(t), y(t))$ . Используя правило покомпонентного сложения (и умножения на скаляр) векторов, можно записать общее решение (4) и (5) в виде

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= \left( \frac{3}{2}c_1e^{2t} + \frac{1}{3}c_2e^{-5t}, c_1e^{2t} + c_2e^{-5t} \right) = \\ &= c_1 \left( \frac{3}{2}e^{2t}, e^{2t} \right) + c_2 \left( \frac{1}{3}e^{-5t}, e^{-5t} \right). \end{aligned}$$

Это выражение представляет общее решение системы (1) в виде линейной комбинации двух частных решений

$$(x_1, y_1) = \left( \frac{3}{2}e^{2t}, e^{2t} \right) \quad \text{и} \quad (x_2, y_2) = \left( \frac{1}{3}e^{-5t}, e^{-5t} \right). \quad \blacksquare$$

### Линейные операторы

В примере 1 с помощью специальной процедуры удалось исключить одну зависимую переменную, выразив ее через другую. Теперь опишем систематический метод исключения. Для этой цели удобнее всего воспользоваться операционной нотацией. **Линейным дифференциальным оператором** порядка  $n$  с *постоянными* коэффициентами называется оператор

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0, \quad (6)$$

где  $D$  обозначает операцию дифференцирования по независимой переменной  $t$ . Если  $L_1$  и  $L_2$  — два таких оператора, то их произведение  $L_1 L_2$  определяется следующим образом:

$$\blacktriangleright \quad L_1 L_2[x] = L_1[L_2 x]. \quad (7)$$

Например, если  $L_1 = D + a$ , а  $L_2 = D + b$ , то

$$\begin{aligned} L_1 L_2[x] &= (D + a)[(D + b)x] = D(Dx + bx) + a(Dx + bx) = \\ &= [D^2 + (a + b)D + ab]x. \end{aligned}$$

На этом примере видно, что два линейных дифференциальных оператора с постоянными коэффициентами можно перемножать так, как обычные многочлены относительно “переменной”  $D$ . Из коммутативности умножения многочленов следует, что

$$L_1L_2[x] = L_2L_1[x] \tag{8}$$

в случае, когда требуемые производные функции  $x(t)$  существуют. Заметим, что, в отличие от операторов с постоянными коэффициентами, линейные операторы с переменными коэффициентами свойством коммутативности не обладают — см. задачи 21 и 22.

Любая система двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами может быть записана в виде

$$\begin{aligned} L_1x + L_2y &= f_1(t), \\ L_3x + L_4y &= f_2(t), \end{aligned} \tag{9}$$

где  $L_1, L_2, L_3$  и  $L_4$  — линейные дифференциальные операторы (возможно различных порядков), заданные равенствами типа (6), а  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  — заданные функции. Например, систему дифференциальных уравнений (1) из примера 1 можно записать в виде

$$\begin{aligned} (D - 4)x + 3y &= 0, \\ -6x + (D + 7)y &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где  $L_1 = D - 4, L_2 = 3, L_3 = -6$  и  $L_4 = D + 7$ .

Чтобы исключить зависимую переменную  $x$  из системы (9), подействуем оператором  $L_3$  на первое уравнение и оператором  $L_1$  — на второе. Тогда получим систему

$$\begin{aligned} L_3L_1x + L_3L_2y &= L_3f_1(t), \\ L_1L_3x + L_1L_4y &= L_1f_2(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Вычитая первое уравнение от второго, получим следующее (единственное) уравнение

$$(L_1L_4 - L_2L_3)y = L_1f_2(t) - L_3f_1(t) \tag{12}$$

с одной зависимой переменной  $y$ . Решив это уравнение, получим функцию  $y = y(t)$ . Затем подставим ее в какое-либо из исходных уравнений (9), решив которое, получим  $x = x(t)$ .

В качестве альтернативы аналогичным образом можно исключить из исходной системы (9) зависимую переменную  $y$ . В этом случае мы получим уравнение

$$(L_1L_4 - L_2L_3)x = L_4f_1(t) - L_2f_2(t), \tag{13}$$

которое теперь можно решить относительно неизвестной функции  $x = x(t)$ .

Заметим, что в левой части обоих уравнений (12) и (13) появляется один и тот же оператор  $L_1L_4 - L_2L_3$ . Это **определитель-оператор**

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = L_1L_4 - L_2L_3 \tag{14}$$

системы (9). С помощью определителей уравнения (12) и (13) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x &= \begin{vmatrix} f_1(t) & L_2 \\ f_2(t) & L_4 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y &= \begin{vmatrix} L_1 & f_1(t) \\ L_3 & f_2(t) \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{15}$$

Важно отметить, что определители в правой части уравнений (15) выражаются с помощью операторов, действующих на функции. Уравнения (15) очень похожи на правило Крамера решения системы двух линейных уравнений от двух (алгебраических) переменных и поэтому их легко запомнить. Действительно, систему двух линейных дифференциальных уравнений можно решить либо только что описанным методом последовательного исключения переменных, либо с помощью непосредственного использования детерминантов в формулах (15). Второй способ особенно прост в случае, когда система однородна ( $f_1(t) \equiv 0$  и  $f_2(t) \equiv 0$ ), так как в этом случае правые части уравнений (12), (13) и (15) равны нулю.

**Пример 2** Найдем общее решение системы

$$\begin{aligned}(D - 4)x + 3y &= 0, \\ -6x + (D + 7)y &= 0.\end{aligned}\tag{10}$$

**Решение** Определитель-оператор этой системы равен

$$(D - 4)(D + 7) - 3 \cdot (-6) = D^2 + 3D - 10.\tag{16}$$

Следовательно, уравнения (13) и (12) принимают вид

$$\begin{aligned}x'' + 3x' - 10x &= 0, \\ y'' + 3y' - 10y &= 0.\end{aligned}$$

Каждое из этих уравнений имеет характеристическое уравнение

$$r^2 + 3r - 10 = (r - 2)(r + 5) = 0,$$

откуда их (по отдельности) общие решения даются формулами

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1 e^{2t} + a_2 e^{-5t}, \\ y(t) &= b_1 e^{2t} + b_2 e^{-5t}.\end{aligned}\tag{17}$$

Эти формулы содержат *четыре* произвольные постоянные  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$ . Но, согласно теореме 1 раздела 4.1, общее решение системы двух дифференциальных уравнений первого порядка должно содержать только две произвольные постоянные. Эту очевидную проблему следует немедленно разрешить.

Причина подобного явления проста: между этими четырьмя постоянными должны быть какие-то скрытые соотношения. Их можно обнаружить, подставив решения (17) в какое-либо из уравнений системы (10). Подставив в первое уравнение, получим

$$\begin{aligned}0 &= x' - 4x + 3y = \\ &= (2a_1 e^{2t} - 5a_2 e^{-5t}) - 4(a_1 e^{2t} + a_2 e^{-5t}) + 3(b_1 e^{2t} + b_2 e^{-5t});\end{aligned}$$

иными словами,

$$0 = (-2a_1 + 3b_1)e^{2t} + (-9a_2 + 3b_2)e^{-5t}.$$

Но функции  $e^{2t}$  и  $e^{-5t}$  линейно независимы, откуда  $a_1 = \frac{3}{2}b_1$  и  $a_2 = \frac{1}{3}b_2$ . Следовательно, искомое общее решение имеет вид

$$x(t) = \frac{3}{2}b_1e^{2t} + \frac{1}{3}b_2e^{-5t}, \quad y(t) = b_1e^{2t} + b_2e^{-5t}.$$

Заметим, что полученный результат совпадает с общим решением (формулы (4) и (5)), полученным в примере 1 другим методом. ■

Как видно из примера 2, процедура исключения переменных обычно приводит к появлению лишних взаимно зависящих (а поэтому ненужных и нежелательных) произвольных постоянных. Они должны быть исключены с помощью подстановки полученных формул общего решения в одно или несколько исходных дифференциальных уравнений. Если определитель-оператор в формулах (15) *не равен тождественно нулю*, то количество независимых произвольных постоянных в решении системы (9) равно порядку определителя-оператора, т. е. его степени как многочлена от переменной  $D$ . (Доказательство этого факта приведено на с. 144–150 монографии Айнса по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изданной в Нью-Йорке в 1956 году (E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, New York: Dover, 1956).) Таким образом, общее решение системы (10) из примера 2 содержит две произвольные постоянные, так как его определитель-оператор  $D^2 + 3D - 10$  имеет порядок 2.

Если определитель-оператор тождественно равен нулю, то система называется **вырожденной**. Вырожденная система либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений. Например, уравнения

$$\begin{aligned} Dx - Dy &= 0, \\ 2Dx - 2Dy &= 1 \end{aligned}$$

составляют систему, определитель-оператор которой тождественно равен нулю. Конечно, эта система несовместна, и, следовательно, не имеет решений. Другой пример: уравнения

$$\begin{aligned} Dx + Dy &= t, \\ 2Dx + 2Dy &= 2t \end{aligned}$$

составляют систему, определитель-оператор которой также тождественно равен нулю. Очевидно, эти уравнения эквивалентны; любое из них является следствием другого и его можно считать избыточным (лишним). Поэтому *любую* непрерывно дифференцируемую функцию можно подставить вместо  $x(t)$ , а затем проинтегрировать полученное уравнение и таким образом получить  $y(t)$ . Грубо говоря, любая вырожденная система эквивалентна либо несовместной (переопределенной) системе, либо системе, содержащей избыточные уравнения (т. е. недоопределенной, поскольку число уравнений исходной системы равно числу неизвестных).

Хотя приведенные выше процедуры и результаты описаны для систем двух уравнений, их можно обобщить и на системы трех и больше уравнений. Для системы

$$\begin{aligned} L_{11}x + L_{12}y + L_{13}z &= f_1(t), \\ L_{21}x + L_{22}y + L_{23}z &= f_2(t), \\ L_{31}x + L_{32}y + L_{33}z &= f_3(t) \end{aligned} \tag{18}$$

трех линейных уравнений, неизвестная функция  $x(t)$  удовлетворяет одному линейному уравнению

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1(t) & L_{12} & L_{13} \\ f_2(t) & L_{22} & L_{23} \\ f_3(t) & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Другие неизвестные функции  $y = y(t)$  и  $z = z(t)$  удовлетворяют аналогичным уравнениям. Однако для большей части систем более чем трех уравнений метод определителей-операторов слишком трудоемкий и поэтому на практике не применяется.

### Механические колебания

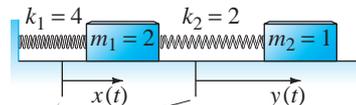
Механическая система обычно колеблется (вибрирует, осциллирует) одним или несколькими способами. Методы, изложенные в этом разделе, можно использовать для анализа “собственных мод колебаний” данной механической системы. Проиллюстрируем этот подход на примере 3.

#### Пример 3

В примере 1 раздела 4.1 мы вывели уравнения

$$\begin{aligned} (D^2 + 3)x + (-1)y &= 0, \\ -2x + (D^2 + 2)y &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

которым удовлетворяют смещения двух материальных точек на рис. 4.2.2. Здесь  $f(t) \equiv 0$ , так как мы предполагаем, что внешние силы на систему не действуют. Найдем общее решение системы (20).



Положения равновесия

**Рис. 4.2.2.** Система из примера 3, состоящая из двух материальных точек, закрепленных на пружинах

**Решение** Определитель-оператор системы (20) равен

$$(D^2 + 3)(D^2 + 2) - (-1)(-2) = D^4 + 5D^2 + 4 = (D^2 + 1)(D^2 + 4).$$

Следовательно,  $x(t)$  и  $y(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (D^2 + 1)(D^2 + 4)x &= 0, \\ (D^2 + 1)(D^2 + 4)y &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Корни характеристического уравнения  $(r^2 + 1)(r^2 + 4) = 0$  равны  $i, -i, 2i$  и  $-2i$ . Поэтому общие решения уравнений (21) имеют вид

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t, \\ y(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + d_1 \cos 2t + d_2 \sin 2t. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку определитель-оператор имеет порядок 4, общее решение должно содержать четыре (а не восемь) произвольных постоянных. Подставив значения  $x(t)$  и  $y(t)$  из равенств (22) в первое уравнение системы (20), получим

$$\begin{aligned} 0 &= x'' + 3x - y = \\ &= (-a_1 \cos t - a_2 \sin t - 4b_1 \cos 2t - 4b_2 \sin 2t) + \\ &\quad + 3(a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t) - \\ &\quad - (c_1 \sin t + c_2 \sin t + d_1 \cos 2t + d_2 \sin 2t); \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} 0 &= (2a_1 - c_1) \cos t + (2a_2 - c_2) \sin t + \\ &\quad + (-b_1 - d_1) \cos 2t + (-b_2 - d_2) \sin 2t. \end{aligned}$$

Поскольку функции  $\cos t, \cos 2t, \sin t$  и  $\sin 2t$  линейно независимы, коэффициенты при них в последнем равенстве равны нулю. Следовательно,

$$c_1 = 2a_1, \quad c_2 = 2a_2, \quad d_1 = -b_1 \quad \text{и} \quad d_2 = -b_2.$$

Отсюда следует, что искомым общим решением системы (20) будут функции

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t, \\ y(t) &= 2a_1 \cos t + 2a_2 \sin t - b_1 \cos 2t - b_2 \sin 2t. \end{aligned} \quad (23)$$

■

Уравнения (23) описывают **свободные колебания** механической системы, состоящей из материальной точки, закрепленной на пружине (эта система изображена на рис. 4.2.2), т. е. движение рассматриваемой системы *при отсутствии* внешних сил. Для определения значений  $a_1, a_2, b_1$  и  $b_2$  необходимы четыре начальных условия (обычно это начальные координаты и скорости). Выражение

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= a_1(\cos t, 2 \cos t) + a_2(\sin t, 2 \sin t) + \\ &\quad + b_1(\cos 2t, -\cos 2t) + b_2(\sin 2t, -\sin 2t), \end{aligned} \quad (24)$$

представляющее собой линейную комбинацию частных решений, как раз и есть общее решение системы дифференциальных уравнений (20). Более того, первые два из этих частных решений (как и два последующих) описывают сходные с физической точки зрения колебания тел.

Действительно, с помощью обычных тригонометрических преобразований можем записать

$$\begin{aligned} a_1 \cos t + a_2 \sin t &= A \cos(t - \alpha), \\ 2a_1 \cos t + 2a_2 \sin t &= 2A \cos(t - \alpha) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t &= B \cos(2t - \beta), \\ -b_1 \cos 2t - b_2 \sin 2t &= -B \cos(2t - \beta) \end{aligned}$$

где  $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = a_2/a_1$ ,  $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$  и  $\operatorname{tg} \beta = b_2/b_1$ . Тогда уравнение (24) примет вид

$$(x, y) = A(x_1, y_1) + B(x_2, y_2), \tag{25}$$

где частные решения

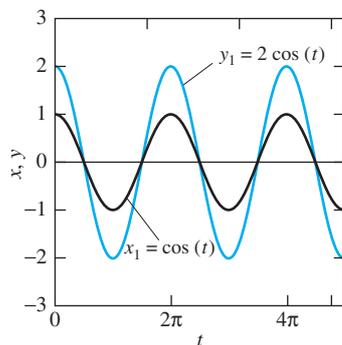
$$(x_1(t), y_1(t)) = (\cos(t - \alpha), 2 \cos(t - \alpha)) \tag{26}$$

и

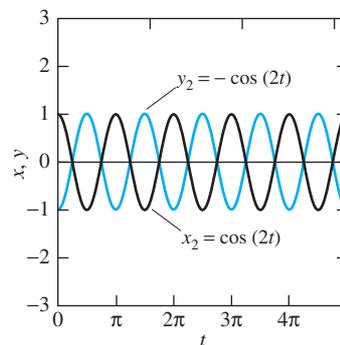
$$(x_2(t), y_2(t)) = (\cos(2t - \beta), -\cos(2t - \beta)) \tag{27}$$

описывают две **собственные моды колебаний** системы, состоящей из материальной точки, закрепленной на пружине. Более того, благодаря им обнаруживаются две (круговые, или циклические) **собственные частоты**  $\omega_1 = 1$  и  $\omega_2 = 2$ .

Линейная комбинация в формуле (25) отображает произвольные свободные колебания системы, состоящей из материальной точки, закрепленной на пружине, как суперпозицию ее двух собственных мод колебаний с постоянными  $A$ ,  $\alpha$ ,  $B$  и  $\beta$ , которые определяются начальными условиями. На рис. 4.2.3 (при  $\alpha = 0$ ) изображена собственная мода  $(x_1, y_1)$ , заданная формулой (26), при которой две материальные точки движутся синхронно в одном и том же направлении с одинаковой частотой колебаний  $\omega_1 = 1$ , но амплитуда тела массой  $m_2$  в два раза больше, чем тела массой  $m_1$  (так как  $y_1 = 2x_1$ ). Нарис. 4.2.4 (при  $\beta = 0$ ) изображена собственная мода  $(x_2, y_2)$ , заданная формулой (27), при которой две материальные точки движутся синхронно в противоположных направлениях с одинаковой частотой колебаний  $\omega_2 = 2$ , причем амплитуды колебаний равны (так как  $y_2 = -x_2$ ).



**Рис. 4.2.3.** Два тела движутся в одинаковых направлениях, каждое с частотой  $\omega_1 = 1$



**Рис. 4.2.4.** Два тела движутся в противоположных направлениях с частотой  $\omega_2 = 2$

## 4.2. Задачи

В задачах 1–20 найдите общие решения данных систем линейных уравнений. Если заданы начальные условия, найдите удовлетворяющее им частное решение. В задачах 1–6 с помощью компьютерной системы или графического калькулятора постройте поле направлений и некоторые фазовые траектории данной системы.

1.  $x' = -x + 3y, y' = 2y$
2.  $x' = x - 2y, y' = 2x - 3y$
3.  $x' = -3x + 2y, y' = -3x + 4y; x(0) = 0, y(0) = 2$
4.  $x' = 3x - y, y' = 5x - 3y; x(0) = 1, y(0) = -1$
5.  $x' = -3x - 4y, y' = 2x + y$
6.  $x' = x + 9y, y' = -2x - 5y; x(0) = 3, y(0) = 2$
7.  $x' = 4x + y + 2t, y' = -2x + y$
8.  $x' = 2x + y, y' = x + 2y - e^{2t}$
9.  $x' = 2x - 3y + 2 \sin 2t, y' = x - 2y - \cos 2t$
10.  $x' + 2y' = 4x + 5y, 2x' - y' = 3x; x(0) = 1, y(0) = -1$
11.  $2y' - x' = x + 3y + e^t, 3x' - 4y' = x - 15y + e^{-t}$
12.  $x'' = 6x + 2y, y'' = 3x + 7y$
13.  $x'' = -5x + 2y, y'' = 2x - 8y$
14.  $x'' = -4x + \sin t, y'' = 4x - 8y$
15.  $x'' - 3y'' - 2x = 0, y'' + 3x' - 2y = 0$
16.  $x'' + 13y' - 4x = 6 \sin t, y'' - 2x' - 9y = 0$
17.  $x'' + y'' - 3x' - y' - 2x + 2y = 0, 2x'' + 3y'' - 9x' - 2y' - 4x + 6y = 0$
18.  $x' = x + 2y + z, y' = 6x - y, z' = -x - 2y - z$
19.  $x' = 4x - 2y, y' = -4x + 4y - 2z, z' = -4y + 4z$
20.  $x' = y + z + e^{-t}, y' = x + z, z' = x + y$  (Указание. Решите характеристическое уравнение методом подбора корней.)
21. Пусть  $L_1 = a_1 D^2 + b_1 D + C_1$  и  $L_2 = a_2 D^2 + b_2 D + c_2$ , причем все коэффициенты постоянны, а функция  $x(t)$  дважды дифференцируема. Проверьте, что  $L_1 L_2 x = L_2 L_1 x$ .
22. Предположим, что  $L_1 x = tDx + x$  и что  $L_2 x = Dx + tx$ . Покажите, что  $L_1 L_2 x \neq L_2 L_1 x$ , т. е. линейные операторы с переменными коэффициентами в общем случае не перестановочны.

В задачах 23–25 покажите, что данные системы являются вырожденными. В каждой задаче определите (попытавшись решить систему), имеет ли данная система бесконечно много решений или не имеет их вообще.

23.  $(D + 2)x + (D + 2)y = e^{-3t},$   
 $(D + 3)x + (D + 3)y = e^{-2t}$
24.  $(D + 2)x + (D + 2)y = t,$   
 $(D + 3)x + (D + 3)y = t^2$
25.  $(D^2 + 5D + 6)x + D(D + 2)y = 0,$   
 $(D + 3)x + Dy = 0$

В задачах 26–29 сначала вычислите определитель-оператор, а затем попытайтесь решить данную систему, чтобы определить количество произвольных постоянных, которые содержит общее решение.

26.  $(D^2 + 1)x + D^2 y = 2e^{-t},$   
 $(D^2 - 1)x + D^2 y = 0$
27.  $(D^2 + 1)x + (D^2 + 2)y = 2e^{-t},$   
 $(D^2 - 1)x + D^2 y = 0$
28.  $(D^2 + D)x + D^2 y = 2e^{-t},$   
 $(D^2 - 1)x + (D^2 - D)y = 0$
29.  $(D^2 + 1)x - D^2 y = 2e^{-t},$   
 $(D^2 - 1)x + D^2 y = 0$

30. Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  концентрация соли в обоих резервуарах из примера 2 раздела 4.1 равна 0,5 фунтов/галлон. Решив систему (5), приведенную в разделе 4.1, определите количества соли  $x(t)$  и  $y(t)$  в резервуарах в момент времени  $t$ .

378 Глава 4. Введение в системы дифференциальных уравнений

31. Предположим, что электрическая цепь из примера 3 раздела 4.1 первоначально разомкнута, т.е. ток по ней не течет. Пусть ее замыкают в момент времени  $t = 0$ . Решив систему (9), приведенную в разделе 4.1, найдите  $I_1(t)$  и  $I_2(t)$ .
32. Решите задачу 31 для электрической цепи из задачи 27 раздела 4.1.
33. Решите задачу 31 для электрической цепи из задачи 28 раздела 4.1. Пусть также  $I_1(0) = 2$  и  $Q(0) = 0$ , т.е. в момент времени  $t = 0$  конденсатор не заряжен.
34. Три рассольных бака объемом по 100 галлонов соединены так, как изображено на рис. 4.1.13 раздела 4.1. Предположим, что в первом из баков содержится 100 фунтов соли, а два других бака заполнены пресной водой. Найдите количества соли в каждом из трех баков в момент времени  $t$ . (*Указание.* Рассмотрите уравнения, выведенные в задаче 26 раздела 4.1.)
35. В задаче 31 раздела 4.1 вы вывели уравнения движения частицы массой  $m$  с электрическим зарядом  $q$  в однородном магнитном поле  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ :

$$mx'' = qBy', \quad my'' = -qBx'.$$

Пусть заданы начальные условия  $x(0) = r_0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$  и  $y'(0) = -\omega r_0$ , где  $\omega = qB/m$ . Покажите, что траектория движения частицы представляет собой окружность радиусом  $r_0$ .

36. Пусть на заряженную частицу из задачи 35, которая движется со скоростью  $\mathbf{v}$ , кроме магнитного поля  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$  действует еще и однородное электрическое поле  $\mathbf{E} = E\mathbf{i}$ . Тогда на частицу действует сила  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Предположим, что в начальный момент времени частица покоится в начале координат. Покажите, что ее траектория представляет собой циклоиду

$$x = a(1 - \cos \omega t), \quad y = -a(\omega t - \sin \omega t),$$

где  $a = E/(\omega B)$  и  $\omega = qB/m$ . График такой циклоиды изображен на рис. 4.2.5.

37. Предположим, что в системе из примера 3, состоящей из материальных точек, закрепленных на пружинах,  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 0,5$ ,  $k_1 = 75$  и  $k_2 = 25$ . (а) Найдите общее решение уравнений движения системы. В частности, покажите, что ее собственные частоты равны  $\omega_1 = 5$  и  $\omega_2 = 5\sqrt{3}$ . (б) Опишите собственные моды колебаний системы.
38. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел и трех пружин, которая изображена на рис. 4.2.6. Выведите уравнения движения этой системы:

$$\begin{aligned} m_1 x'' &= -(k_1 + k_2)x + k_2 y \\ m_2 y'' &= k_2 x - (k_2 + k_3)y. \end{aligned}$$

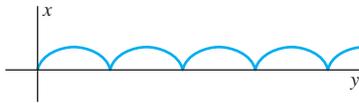


Рис. 4.2.5. Траектория движения частицы из задачи 36 представляет собой циклоиду

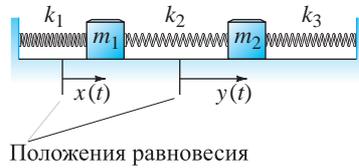


Рис. 4.2.6. Механическая система из задачи 38

В задачах 39–46 найдите общее решение системы из задачи 38 при заданных массах материальных точек и жесткостях пружин. Найдите собственные частоты механической системы и опишите ее собственные моды колебаний. Используя компьютерную систему или графический калькулятор, проиллюстрируйте графически две собственные моды (как на рис. 4.2.3 и 4.2.4).

39.  $m_1 = 4, m_2 = 2, k_1 = 8, k_2 = 4, k_3 = 0$       40.  $m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 100, k_2 = 50, k_3 = 0$   
 41.  $m_1 = 1, m_2 = 1, k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 1$       42.  $m_1 = 1, m_2 = 2, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 2$   
 43.  $m_1 = 1, m_2 = 1, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1$       44.  $m_1 = 1, m_2 = 1, k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 2$   
 45.  $m_1 = 1, m_2 = 2, k_1 = 2, k_2 = 4, k_3 = 4$       46.  $m_1 = 1, m_2 = 1, k_1 = 4, k_2 = 6, k_3 = 4$   
 47. (а) Для системы, изображенной на рис. 4.2.7, выведите систему уравнений движения

$$\begin{aligned} mx'' &= -2kx + ky \\ my'' &= kx - 2ky + kz \\ mz'' &= ky - 2kz. \end{aligned}$$

(б) Предположим, что  $m = k = 1$ . Покажите, что собственные частоты колебаний системы

$$\omega_1 = \sqrt{2}, \quad \omega_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad \text{и} \quad \omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

48. Предположим, что частица движется в плоскости, причем ее траектория  $(x(t), y(t))$  удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned} x'' - 2y' + 3x &= 0, \\ y'' + 2x' + 3y &= 0; \\ x(0) = 4, \quad y(0) = x'(0) = y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Решите эту задачу. У вас должно получиться решение

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 \cos t + \cos 3t, \\ y(t) &= 3 \sin t - \sin 3t. \end{aligned}$$

Проверьте, что эти уравнения задают гипоциклоиду, — кривую, которую рисует точка  $P(x, y)$  окружности радиуса  $b = 1$ , которая катится без скольжения по неподвижной окружности радиуса  $a = 4$  внутри ее. Если в момент времени  $t = 0$  точка  $P$  начинает свое движение из точки  $A(a, 0)$ , то в качестве параметра  $t$  можно взять угол  $AOC$ , изображенный на рис. 4.2.8.

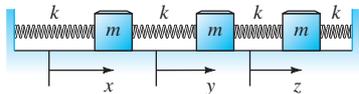


Рис. 4.2.7. Механическая система из задачи 47

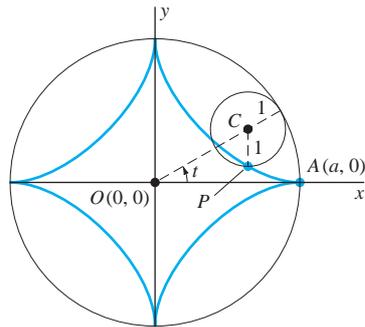


Рис. 4.2.8. Гипоциклоида из задачи 48

## 4.2. Приложение. Решение систем с помощью компьютерной алгебры

Системы компьютерной алгебры можно использовать не только для решения отдельных дифференциальных уравнений, но и для решения систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, систему

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 6x - 7y \quad (1)$$

из примера 1. Команда *Maple*

```
dsolve({diff(x(t),t) = 4*x(t) - 3*y(t),
        diff(y(t),t) = 6*x(t) - 7*y(t)}, {x(t), y(t)});
```

дает результат

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{7}(3a_1 - 2a_2)e^{-5t} + \frac{1}{7}(-3a_1 + 9a_2)e^{2t}, \\ y(t) &= \frac{1}{7}(9a_1 - 6a_2)e^{-5t} + \frac{1}{7}(-2a_1 + 6a_2)e^{2t} \end{aligned} \quad (2)$$

(после небольших упрощений), а команда системы *Mathematica*

```
DSolve[{x'[t] == 4 x[t] - 3 y[t],
        y'[t] == 6 x[t] - 7 y[t]}, {x[t], y[t]}, t]
```

дает результат

$$x(t) = b_1 e^{-5t} + 3b_2 e^{2t}, \quad y(t) = 3b_1 e^{-5t} + 2b_2 e^{2t}. \quad (3)$$

Очевидно ли вам, что общие решения (2) и (3) эквивалентны между собой и эквивалентны общему решению

$$x(t) = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}c_2 e^{-5t}, \quad y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}, \quad (4)$$

которое ранее было найдено в тексте? Каковы соотношения между постоянными  $a_1, a_2$  в общем решении (2), постоянными  $b_1, b_2$  в общем решении (3) и постоянными  $c_1, c_2$  в общем решении (4)?

Теперь рассмотрим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\begin{aligned} x'' &= -3x + y, & x(0) &= 0, & x'(0) &= 6, \\ y'' &= 2x - 2y, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 6 \end{aligned} \quad (5)$$

для системы из примера 3, состоящей из тел, закрепленных на пружинах. Тогда команда *Maple*

```
dsolve({diff(x(t),t,t) = -3*x(t) + y(t),
        diff(y(t),t,t) = 2*x(t) - 2*y(t),
        x(0) = 0, y(0) = 0, D(x)(0) = 6, D(y)(0) = 6},
        {x(t), y(t)});
```

и команда системы *Mathematica*

```
DSolve[{x''[t] == -3 x[t] + y[t],
        y''[t] == 2 x[t] - 2 y[t],
```

```
x[0] == 0, y[0] == 0, x'[0] == 6, y'[0] == 6},
{x[t], y[t]}, t ] // ExpToTrig // Simplify
```

дадут один и тот же результат:

$$x(t) = 4 \sin t + \sin 2t, \quad y(t) = 8 \sin t - \sin 2t, \tag{6}$$

в котором без труда можно узнать линейную комбинацию

- колебаний с частотой 1, при которых два тела движутся синхронно, причем амплитуда колебаний второго тела в два раза больше, чем у первого и
- колебаний с частотой 2, при которых два тела движутся в противоположных направлениях, причем амплитуды колебаний равны.

Попробуйте аналогичным образом применить доступную вам систему компьютерной алгебры для решения задач 1–20 и 39–46 из этого раздела. В задачах 39–46, если хотите, можете также найти частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

### 4.3. Численные методы решения систем

---

Теперь рассмотрим численные методы для нахождения приближенных решений систем дифференциальных уравнений. Наша цель — применить методы из разделов 2.4–2.6 к задаче Коши (задаче с начальными условиями) вида

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

для системы  $m$  дифференциальных уравнений первого порядка. В системе (1)  $t$  — скаляр, а

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{и} \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

— векторнозначные функции. Если координатные функции  $\mathbf{f}$  и все их частные производные непрерывны в некоторой окрестности точки  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ , то, согласно теоремам 3 и 4 из приложения, на некотором подынтервале [оси  $t$ ], содержащем точку  $t_0$ , существует и единственно решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  системы (1). Таким образом, мы можем приступить к рассмотрению следующей проблемы: найти численное приближение этого решения.

Выберем величину шага  $h$ . Мы хотим найти приближенные значения функции  $\mathbf{x}(t)$  в точках  $t_1, t_2, t_3, \dots$ , где  $t_{n+1} = t_n + h$  для  $n \geq 0$ . Предположим, что мы уже вычислили приближения

$$\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_3, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_n$$

к точным значениям

$$\mathbf{x}(t_1), \quad \mathbf{x}(t_2), \quad \mathbf{x}(t_3), \quad \dots, \quad \mathbf{x}(t_n)$$

точного решения системы (1). Тогда, с помощью одного из методов, приведенных в разделах 2.4–2.6, можно сделать шаг от  $\mathbf{x}_n$  к следующему приближенному значению  $\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{x}(t_{n+1})$ . По существу нужно только записать итерационную формулу для выбранного метода в векторном виде.

**Методы Эйлера для систем**

Например, итерационная формула метода Эйлера в случае системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_n). \quad (2)$$

В случае пары дифференциальных уравнений первого порядка (т. е. в случае  $m = 2$ ), мы пишем

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

В этом случае задача Коши (задача с начальными условиями) (1) примет вид

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y), & x(t_0) &= x_0, \\ y' &= g(t, x, y), & y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (3)$$

а скалярные компоненты векторной формулы (2) будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + hg(t_n, x_n, y_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что каждая итерационная формула в (4) имеет тот же вид, что в одномерном методе Эйлера, но теперь в первую формулу (для вычисления  $x_{n+1}$ ) входит  $y_n$  в качестве параметра, во вторую (для вычисления  $y_{n+1}$ ) —  $x_n$ . Все остальные методы из разделов 2.4–2.6 на случай системы (3) обобщаются по такому же образцу.

Усовершенствованный метод Эйлера заключается в том, что сначала вычисляется прогноз

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \quad (5)$$

а затем поправка

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}[\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1})]. \quad (6)$$

В случае двумерных задач Коши (задач с начальными условиями) (3), скалярные компоненты в формулах (5) и (6) имеют вид

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n, y_n), \\ v_{n+1} &= y_n + hg(t_n, x_n, y_n) \end{aligned} \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}[f(t_n, x_n, y_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})], \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[g(t_n, x_n, y_n) + g(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})]. \end{aligned} \quad (8)$$

**Пример 1**

Рассмотрим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y, & x(0) &= 3; \\ y' &= 5x - 4y, & y(0) &= 6. \end{aligned} \quad (9)$$

Точное решение системы (9) дают функции

$$x(t) = 2e^{-2t} + e^t, \quad y(t) = 5e^{-2t} + e^t. \quad (10)$$

Теперь в равенствах (3) мы полагаем  $f(x, y) = 3x - 2y$  и  $g(x, y) = 5x - 4y$ . Поэтому итерационные формулы Эйлера (4) примут вид

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot (3x_n - 2y_n), \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot (5x_n - 4y_n).$$

При величине шага  $h = 0,1$  получим

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + (0,1) \cdot [3 \cdot 3 - 2 \cdot 6] = 2,7, \\ y_1 &= 6 + (0,1) \cdot [5 \cdot 3 - 4 \cdot 6] = 5,1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x_2 &= 2,7 + (0,1) \cdot [3 \cdot (2,7) - 2 \cdot (5,1)] = 2,49, \\ y_2 &= 5,1 + (0,1) \cdot [5 \cdot (2,7) - 4 \cdot (5,1)] = 4,41. \end{aligned}$$

В точке  $t_2 = 0,2$  фактические (истинные) значения решения (10) равны  $x(0,2) \approx 2,562$  и  $y(0,2) \approx 4,573$ .

Теперь вычислим приблизительные значения  $x(0,2)$  и  $y(0,2)$  усовершенствованным методом Эйлера за один только шаг. Для этого возьмем величину шага  $h = 0,2$ . Сначала вычислим прогнозы

$$\begin{aligned} u_1 &= 3 + (0,2) \cdot [3 \cdot 3 - 2 \cdot 6] = 2,4, \\ v_1 &= 6 + (0,2) \cdot [5 \cdot 3 - 4 \cdot 6] = 4,2. \end{aligned}$$

Затем по формулам (8) для поправок вычисляем

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + (0,1) \cdot ([3 \cdot 3 - 2 \cdot 6] + [3 \cdot (2,4) - 2 \cdot (4,2)]) = 2,58, \\ y_1 &= 6 + (0,1) \cdot ([5 \cdot 3 - 4 \cdot 6] + [5 \cdot (2,4) - 4 \cdot (4,2)]) = 4,62. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, за один шаг усовершенствованного метода Эйлера удастся получить более точное приближение, чем два шага обычного метода Эйлера. ■

**Метод Рунге–Кутты и уравнения второго порядка**

Вот векторный вид итерационной формулы метода Рунге–Кутты:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (11)$$

где векторы  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$ ,  $\mathbf{k}_3$  и  $\mathbf{k}_4$  определяются (аналогично формулам (5a)–(5d) из раздела 2.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_1\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_2\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_3). \end{aligned} \tag{12}$$

Для того чтобы найти скалярный вид формул метода Рунге–Кутты для двумерной задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y), & x(t_0) &= x_0, \\ y' &= g(t, x, y), & y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{3}$$

запишем

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ G_i \end{bmatrix}.$$

Тогда итерационные формулы Рунге–Кутты для перехода от  $(x_n, y_n)$  к следующему приближению  $(x_{n+1}, y_{n+1}) \approx (x(t_{n+1}), y(t_{n+1}))$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4), \end{aligned} \tag{13}$$

где значения  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$  функции  $f$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} F_1 &= f(t_n, x_n, y_n), \\ F_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hF_1, y_n + \frac{1}{2}hG_1\right), \\ F_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hF_2, y_n + \frac{1}{2}hG_2\right), \\ F_4 &= f(t_n + h, x_n + hF_3, y_n + hG_3), \end{aligned} \tag{14}$$

а значения  $G_1, G_2, G_3$  и  $G_4$  функции  $g$  вычисляются по аналогичным формулам.

Вероятно, двумерный метод Рунге–Кутты чаще всего применяется для численного решения задач Коши (задач с начальными условиями) для дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\begin{aligned} x'' &= g(t, x, x'), \\ x(t_0) &= x_0, \quad x'(t_0) = y_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Введем вспомогательную переменную  $y = x'$ . Тогда задача (15) сведется к двумерной задаче первого порядка

$$\begin{aligned} x' &= y, & x(t_0) &= x_0, \\ y' &= g(t, x, y), & y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{16}$$

Эта задача имеет вид (3) при  $f(t, x, y) = y$ .

Если функции  $f$  и  $g$  не слишком сложны, то можно вручную выполнить необходимое количество шагов для описанного здесь двумерного метода Рунге–Кутты. Однако первые действующие электронные вычислительные устройства были созданы (во время Второй мировой войны) специально для вычисления траекторий артиллерийских снарядов по численным методам, очень похожим на метод Рунге–Кутты. В приложении к этому разделу приведены две версии программы RK2DIM, которую можно использовать для решения двумерных систем: одна — для калькулятора TI-85, а вторая — на языке BASIC.

**Пример 2** Точным решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$x'' = -x; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \tag{17}$$

является функция  $x(t) = \sin t$ . Подстановка  $y = x'$  преобразует уравнение (17) в двумерную задачу

$$\begin{aligned} x' &= y, & x(0) &= 0; \\ y' &= -x, & y(0) &= 1, \end{aligned} \tag{18}$$

которая имеет вид (3) при  $f(t, x, y) = y$  и  $g(t, x, y) = -x$ . В таблице на рис. 4.3.1 приведены результаты для  $0 \leq t \leq 5$  (радиан), полученные с помощью программы RK2DIM при величине шага  $h = 0,05$ . Все значения  $x = \sin t$  и  $y = \cos t$  точны до пятого знака. ■

| $t$ | $x = \sin t$ | $y = \cos t$ |
|-----|--------------|--------------|
| 0,5 | +0,47943     | +0,87758     |
| 1,0 | +0,84147     | +0,54030     |
| 1,5 | +0,99749     | +0,07074     |
| 2,0 | +0,90930     | -0,41615     |
| 2,5 | +0,59847     | -0,80114     |
| 3,0 | +0,14112     | -0,98999     |
| 3,5 | -0,35078     | -0,93646     |
| 4,0 | -0,75680     | -0,65364     |
| 4,5 | -0,97753     | -0,21080     |
| 5,0 | -0,95892     | +0,28366     |

**Рис. 4.3.1.** Значения, полученные методом Рунге–Кутты (при  $h = 0,05$ ) для задачи (18)

**Пример 3** В примере 4 раздела 2.3 мы рассматривали лунный посадочный модуль, который в начальный момент времени находится в состоянии свободного падения на поверхность Луны. Его тормозные двигатели в рабочем состоянии обеспечивают замедление  $T = 4 \text{ м/с}^2$ . Ранее мы нашли, что мягкая посадка на поверхность Луны будет достигнута в том случае, если

эти тормозные реактивные двигатели включить тогда, когда посадочный модуль находится на высоте 41 870 метров (немного больше 26 миль) над поверхностью Луны, причем в этот момент лунный посадочный модуль снижается со скоростью 450 м/с.

Теперь мы хотим вычислить *время спуска* лунного посадочного модуля. Пусть расстояние  $x(t)$  посадочного модуля от центра Луны измеряется в метрах, а время  $t$  — в секундах. Согласно анализу, проведенному в разделе 2.3 (где мы использовали обозначение  $r(t)$  вместо  $x(t)$ ),  $x(t)$  является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = T - \frac{GM}{x^2} = 4 - \frac{4,9044 \times 10^{12}}{x^2}, \quad (19)$$

$$x(0) = R + 41870 = 1781870, \quad x'(0) = -450,$$

где  $G \approx 6,6726 \times 10^{-11}$  Н·(м/кг)<sup>2</sup> — универсальная гравитационная постоянная, а  $M = 7,35 \times 10^{22}$  кг и  $R = 1,74 \times 10^6$  м — масса и радиус Луны. Мы ищем значение  $t$ , при котором  $x(t) = R = 1\,740\,000$ .

Задача (19) эквивалентна системе уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad x(0) = 1781870; \quad (20)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 - \frac{4,9044 \times 10^{12}}{x^2}, \quad y(0) = -450.$$

В таблице на рис. 4.3.2 приведен результат аппроксимации методом Рунге–Кутты при величине шага  $h = 1$  (приведенные данные совпадают с данными, полученным при величине шага  $h = 2$ ). Очевидно, что посадка на поверхность Луны ( $x = 1\,740\,000$ ) произойдет в некоторый момент времени между  $t = 180$  и  $t = 190$  секунд. В таблице на рис. 4.3.3 приведены результаты следующего приближения методом Рунге–Кутты при  $t(0) = 180$ ,  $x(0) = 1\,740\,059$ ,  $y(0) = -16,83$  и  $h = 0,1$ . Теперь очевидно, что время спуска посадочного модуля к поверхности Луны очень близко к 187 секундам, т. е. к 3 минутам и 7 секундам. (Последние значения скорости в этих двух таблицах положительны, потому что посадочный модуль начал бы подниматься, если бы его тормозные реактивные двигатели не были выключены при посадке.) ■

### Системы высших порядков

Как было показано в разделе 4.1, любая система дифференциальных уравнений высшего порядка может быть заменена эквивалентной системой дифференциальных уравнений первого порядка. Например, рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x'' &= F(t, x, y, x', y'), \\ y'' &= G(t, x, y, x', y') \end{aligned} \quad (21)$$

уравнений второго порядка. Если мы подставим

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad x' = x_3 = x'_1, \quad y' = x_4 = x'_2,$$

| $t$ (с) | $x$ (м)   | $v$ (м/с) |
|---------|-----------|-----------|
| 0       | 1 781 870 | -450,00   |
| 20      | 1 773 360 | -401,04   |
| 40      | 1 765 826 | -352,37   |
| 60      | 1 759 264 | -303,95   |
| 80      | 1 753 667 | -255,74   |
| 100     | 1 749 033 | -207,73   |
| 120     | 1 745 357 | -159,86   |
| 140     | 1 742 637 | -112,11   |
| 160     | 1 740 872 | -64,45    |
| 180     | 1 740 059 | -16,83    |
| 200     | 1 740 199 | 30,77     |

**Рис. 4.3.2.** Спуск посадочного модуля на поверхность Луны

| $t$ (с) | $x$ (м)   | $v$ (м/с) |
|---------|-----------|-----------|
| 180     | 1 740 059 | -16,83    |
| 181     | 1 740 044 | -14,45    |
| 182     | 1 740 030 | -12,07    |
| 183     | 1 740 019 | -9,69     |
| 184     | 1 740 011 | -7,31     |
| 185     | 1 740 005 | -4,93     |
| 186     | 1 740 001 | -2,55     |
| 187     | 1 740 000 | -0,17     |
| 188     | 1 740 001 | 2,21      |
| 189     | 1 740 004 | 4,59      |
| 190     | 1 740 010 | 6,97      |

**Рис. 4.3.3.** Более подробные данные по высоте и скорости при мягкой посадке лунного посадочного модуля

то получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned}
 x_1' &= x_3, \\
 x_2' &= x_4, \\
 x_3' &= F(t, x_1, x_2, x_3, x_4), \\
 x_4' &= G(t, x_1, x_2, x_3, x_4)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

четырёх уравнений первого порядка с неизвестными функциями  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = y(t)$ ,  $x_3(t)$  и  $x_4(t)$ . Писать четырехмерную версию программы RK2DIM для решения этой системы — достаточно громоздкое и утомительное занятие. Но на языках программирования, которые могут обрабатывать векторы, программа  $n$ -мерной версии метода Рунге–Кутты едва ли более сложна, чем одномерная. Например, в приложении к этому разделу приведена программа `rkn` на входном языке системы МАТЛАВ для решения  $n$ -мерных систем. Заметим, что она почти не отличается от одномерной программы `rk`, приведенной на рис. 2.6.11.

**Пример 4**

Предположим, что бейсбольный мяч после удара вылетает из точки  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  с начальной скоростью  $v_0 = 160$  футов/с под углом  $\theta = 30^\circ$ . Если сопротивлением воздуха пренебречь, элементарными методами из раздела 1.2 можно вычислить, что расстояние, которое пролетит бейсбольный мяч по горизонтали до удара о землю, равно  $400\sqrt{3}$  футов (приблизительно 693 футов) и что полет займет 5 секунд. Теперь предположим, что, кроме направленного вниз ускорения свободного падения ( $g = 32$  фута/с<sup>2</sup>), бейсбольный мяч испытывает ускорение из-за сопротивления воздуха, равное  $(0,0025)v^2$  футов в секунду за секунду, причем направление этого ускорения противоположно направлению движения.

Определим, как далеко в горизонтальной плоскости переместится мяч при этих условиях.

**Решение** Согласно задаче 30 из раздела 4.1, уравнения движения бейсбольного мяча имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cv \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -cv \frac{dy}{dt} - g, \quad (23)$$

где  $v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$  — скорость мяча,  $c = 0,0025$ , а  $g = 32$  в единицах  $\text{fps}$ . Как и при выводе системы (22), преобразуем нашу систему в эквивалентную ей систему первого порядка. Получим систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_3, \\ x'_2 &= x_4, \\ x'_3 &= -cx_3 \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, \\ x'_4 &= -cx_4 \sqrt{x_3^2 + x_4^2} - g \end{aligned} \quad (24)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_3(0) &= 80\sqrt{3}, \quad x_4(0) = 80. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что  $x_3(t)$  и  $x_4(t)$  — просто  $x$ - и  $y$ -компоненты вектора скорости бейсбольного мяча, и потому  $v = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$ .

**При отсутствии сопротивления воздуха.** На рис. 4.3.4 приведены численные результаты, полученные с помощью программы для метода Рунге–Кутты, такой как `rkn` при величине шага  $h = 0,1$  и  $c = 0$  (сопротивление воздуха отсутствует). Для удобства физической интерпретации на каждом шаге приведены горизонтальная и вертикальная координаты мяча  $x$  и  $y$ , его скорость  $v$  и угол наклона  $\alpha$  его вектора скорости (отсчет ведется в градусах от горизонтальной оси). Эти результаты совпадают с точным решением при  $c = 0$ . Мяч пролетает горизонтальное расстояние в  $400\sqrt{3} \approx 692,82$  футов в точности за 5 секунд, достигая максимальной высоты 100 футов через 2,5 секунды полета. Заметим также, что скорость мяча при ударе о землю равна его начальной скорости, а угол, под которым мяч упадет на землю, равен начальному углу.

**При наличии сопротивления воздуха.** На рис. 4.3.5 изображены результаты, полученные при достаточно правдоподобном значении постоянной  $c = 0,0025$  для сопротивления воздуха в случае бейсбольного мяча. При величине шага  $h = 0,05$  и  $h = 0,025$  результаты совпадают с точностью до одной сотой фута. При наличии сопротивлением воздуха мяч пролетает существенно меньшее расстояние, чем 400 футов, за

| $t$ | $x$    | $y$    | $v$    | $\alpha$ |
|-----|--------|--------|--------|----------|
| 0,0 | 0,00   | 0,00   | 160,00 | +30      |
| 0,5 | 69,28  | 36,00  | 152,63 | +25      |
| 1,0 | 138,56 | 64,00  | 146,64 | +19      |
| 1,5 | 207,85 | 84,00  | 142,21 | +13      |
| 2,0 | 277,13 | 96,00  | 139,48 | +7       |
| 2,5 | 346,41 | 100,00 | 138,56 | +0       |
| 3,0 | 415,69 | 96,00  | 139,48 | -7       |
| 3,5 | 484,97 | 84,00  | 142,21 | -13      |
| 4,0 | 554,26 | 64,00  | 146,64 | -19      |
| 4,5 | 623,54 | 36,00  | 152,63 | -25      |
| 5,0 | 692,82 | 0,00   | 160,00 | -30      |

**Рис. 4.3.4.** Полет бейсбольного мяча при отсутствии сопротивления воздуха ( $c = 0$ )

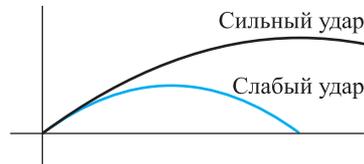
| $t$ | $x$    | $y$   | $v$    | $\alpha$ |
|-----|--------|-------|--------|----------|
| 0,0 | 0,00   | 0,00  | 160,00 | +30      |
| 0,5 | 63,25  | 32,74 | 127,18 | +24      |
| 1,0 | 117,11 | 53,20 | 104,86 | +17      |
| 1,5 | 164,32 | 63,60 | 89,72  | +8       |
| 2,0 | 206,48 | 65,30 | 80,17  | -3       |
| 2,5 | 244,61 | 59,22 | 75,22  | -15      |
| 3,0 | 279,29 | 46,05 | 73,99  | -27      |
| 3,5 | 310,91 | 26,41 | 75,47  | -37      |
| 4,0 | 339,67 | 0,91  | 78,66  | -46      |

**Рис. 4.3.5.** Полет бейсбольного мяча, испытывающего сопротивление воздуха ( $c = 0,0025$ )

время, чуть большее 4 секунд. Более подробные данные, приведенные на рис. 4.3.6, показывают, что мяч пролетит лишь около 340 футов, причем максимальная высота приблизительно равна всего лишь 66 футам. Как показано на рис. 4.3.7, сопротивление воздуха превратило выдающийся удар (мяч попал бы точно в центр поля) в весьма посредственный. Заметим также, что при ударе о землю скорость мяча немного меньше половины его начальной скорости (всего лишь около 79 футов/с), причем мяч пада-

| $t$      | $x$      | $y$      | $v$      | $\alpha$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1,5      | 164,32   | 63,60    | 89,72    | +8       |
| 1,6      | 173,11   | 64,60    | 87,40    | +5       |
| 1,7      | 181,72   | 65,26    | 85,29    | +3       |
| 1,8      | 190,15   | 65,60    | 83,39    | +1       |
| 1,9      | 198,40   | 65,61    | 81,68    | -1       |
| 2,0      | 206,48   | 65,30    | 80,17    | -3       |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 3,8      | 328,50   | 11,77    | 77,24    | -42      |
| 3,9      | 334,14   | 6,45     | 77,93    | -44      |
| 4,0      | 339,67   | 0,91     | 78,66    | -46      |
| 4,1      | 345,10   | -4,84    | 79,43    | -47      |
| 4,2      | 350,41   | -10,79   | 80,22    | -49      |

**Рис. 4.3.6.** Полет мяча: высшая точка и удар о землю



**Рис. 4.3.7.** Полет бейсбольного мяча: точное попадание в цель или упадет куда попало?

ет под более крутым углом (приблизительно  $46^\circ$ ). Каждый бейсбольный болельщик, конечно, из опыта хорошо знаком с этими особенностями траектории полета мяча.

### Методы с переменной величиной шага

Метод Рунге–Кутта для больших систем требует весьма большого объема вычислений, даже если применяется компьютер. Поэтому, так же как нельзя выбирать слишком большую величину шага  $h$  (потому что погрешность результата — решения — может быть больше допустимой), нельзя выбирать и слишком маленькую величину шага, так как объем вычислительной работы может превзойти имеющиеся вычислительные ресурсы. Таким образом, на практике при применении численных методов решения дифференциальных уравнений необходимо найти компромисс между точностью и эффективностью.

Чтобы не жертвовать точностью и не выполнять лишних вычислений, разработаны современные *методы с переменной величиной шага*, в которых величина шага  $h$  может изменяться в процессе вычисления решения. Большая величина шага выбирается там, где зависимые переменные изменяются медленно; меньшая величина шага берется тогда, когда эти переменные изменяются быстро, — это позволяет предотвратить большие ошибки.

Приспособленный для этой цели метод Рунге–Кутта называется *адаптивным* методом Рунге–Кутта, методом Рунге–Кутта *с выбором величины шага*, или методом Рунге–Кутта *с переменной величиной шага*. В этом варианте (или метода Рунге–Кутта используются заданные наперед значения минимальной допустимой погрешности *MinTol* и максимальной допустимой погрешности *MaxTol* для того, чтобы ошибка, допущенная на очередном шаге при переходе от  $\mathbf{x}_n$  к  $\mathbf{x}_{n+1}$ , была не слишком большой (что повлекло бы большую погрешность результата) и не слишком малой (что повлекло бы неэффективность метода вследствие слишком большого объема вычислений). Достаточно простая схема для приспособления метода Рунге–Кутта выглядит следующим образом.

- Достигнув  $\mathbf{x}_n$  с помощью метода Рунге–Кутта при величине шага  $t_n - t_{n-1} = h$ , обозначим через  $\mathbf{x}^{(1)}$  результат продвижения методом Рунге–Кутта еще на один шаг величиной  $h$ , а через  $\mathbf{x}^{(2)}$  — результат продвижения методом Рунге–Кутта на *два* шага, величина каждого из которых равна  $h/2$ .
- Считая аппроксимацию  $\mathbf{x}^{(2)}$  более точной к действительному значению  $\mathbf{x}(t_n + h)$ , чем  $\mathbf{x}^{(1)}$ , в качестве оценки допущенной ошибки при вычислении  $\mathbf{x}^{(1)}$  принимаем

$$Err = |\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}|.$$

- Если допущенная ошибка удовлетворяет неравенствам  $MinTol \leq Err \leq MaxTol$ , то положим  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}^{(1)}$ ,  $t_{n+1} = t_n + h$  и перейдем к следующему шагу.
- Если допущенная ошибка  $Err < MinTol$ , то считаем ошибку слишком маленькой! Следовательно, положим  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}^{(1)}$ ,  $t_{n+1} = t_n + h$ , а величину шага на следующей итерации удвоим (получим величину шага  $2h$ ).
- Если допущенная ошибка  $Err > MaxTol$ , то ошибка слишком велика. В этом случае отбросим значение  $\mathbf{x}^{(1)}$  и попытаемся начать заново с  $\mathbf{x}_n$ , но перед этим уменьшим величину шага вдвое, т. е. возьмем величину шага равной  $h/2$ .

Детальная реализация такой схемы может быть значительно более сложной. Более подробное, но вполне доступное обсуждение адаптивных методов Рунге–Кутты приведено в разделе 15.2 монографии Уильяма Х. Пресса, посвященной рецептурным тонкостям применения численных методов (искусству научных вычислений), которая была выпущена издательством Кембриджского университета в 1986 году (William H. Press et al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, 1986)).

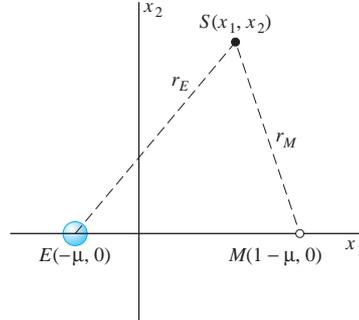
В состав нескольких широко доступных пакетов для научных вычислений (таких как *Maple*, *Mathematica* и *MATLAB*) входят достаточно сложные программы с выбором переменной величины шага, которые могут находить решение системы дифференциальных уравнений практически произвольного порядка. Такие универсальные программы (программы общего назначения) можно использовать, например, для численного моделирования движения главных составных “частей” Солнечной системы: Солнца и девяти (известных) главных планет. Обозначим через  $m_i$  массу, а через  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  — радиус-вектор  $i$ -го из этих десяти небесных тел. Тогда в соответствии с законом Ньютона уравнение движения тела массой  $m_i$  можно записать в виде

$$m_i \mathbf{r}_i'' = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{(r_{ij})^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \quad (26)$$

где  $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$  обозначает расстояние между  $m_i$  и  $m_j$ . Для всех  $i = 1, 2, \dots, 10$  сумма в уравнениях системы (26) берется по всем значениям  $j \neq i$  от 1 до 10. Системе из 10 векторных уравнений (26) соответствует система из 30 скалярных дифференциальных уравнений второго порядка, а эквивалентная система уравнений первого порядка состоит уже из 60 дифференциальных уравнений, содержащих координаты и компоненты скоростей этих 10 главных небесных тел в Солнечной системе. Математические модели с подобным (или большим) количеством дифференциальных уравнений часто встречаются в различных отраслях науки и техники. Системы дифференциальных уравнений такого (или большего) порядка приходится решать не только при проведении научных исследований, но и при разработке (проектировании) новых машин и технологий. Для получения числового решения таких систем и его анализа требуется довольно сложное программное обеспечение.

### Орбиты спутников системы, состоящей из двух небесных тел — Земли и Луны

В качестве примера (научной) программы, для эффективной реализации которой потребовались адаптивные методы с переменной величиной шага, рассмотрим орбиту искусственного спутника Аполлон вокруг Земли  $E$  и Луны  $M$ . Начало системы координат  $x_1 x_2$ , изображенной на рис. 4.3.8, совпадает с центром масс системы, состоящей из двух тел — Земли и Луны,



**Рис. 4.3.8.** Начало системы координат находится в центре масс системы, состоящей из двух тел — Земли и Луны

причем эта система координат вращается с угловой скоростью один оборот за “лунный месяц” (т. е. примерно за  $\tau = 27,32$  дней). Вследствие этого вращения ось  $x_1$  можно выбрать так, чтобы положения Земли и Луны были фиксированы на оси  $x_1$ . За единицу расстояния удобно выбрать расстояние между центрами Земли и Луны (будем считать его постоянным и равным приблизительно 384 000 км). Тогда координаты планет будут следующие: у Земли —  $E(-\mu, 0)$ , а у Луны —  $M(1 - \mu, 0)$ , где, считая массу Земли равной  $m_E$ , а массу Луны —  $m_M$ ,  $\mu = m_M / (m_E + m_M)$ . За единицу массы удобно принять общую массу Земли и Луны  $m_E + m_M$ , а за единицу времени —  $\tau / (2\pi) \approx 4,35$  дня. Тогда в наших единицах измерения гравитационная постоянная в уравнении (26)  $G = 1$ , а координаты спутника  $S(x_1, x_2)$  удовлетворяют уравнениям движения

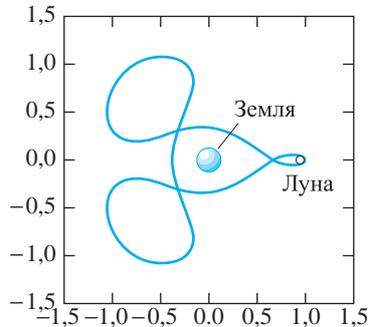
$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1 + 2x_2' - \frac{(1-\mu)(x_1 + \mu)}{(r_E)^3} - \frac{\mu(x_1 - 1 + \mu)}{(r_M)^3}, \\ x_2'' &= x_2 - 2x_1' - \frac{(1-\mu)x_2}{(r_E)^3} - \frac{\mu x_2}{(r_M)^3}, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $r_E$  и  $r_M$  обозначают расстояния от спутника до Земли и до Луны (как показано на рис. 4.3.8). Два первых слагаемых в правой части каждого уравнения обусловлены вращением системы координат<sup>14</sup>. В наших единицах измерения масса Луны приблизительно равна  $m_M = 0,012277471$ . С помощью подстановки

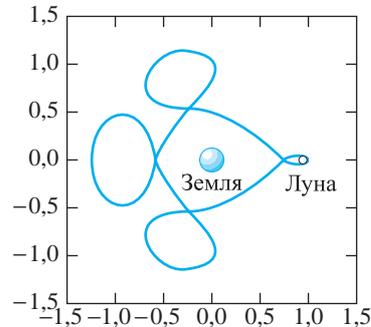
$$x_1' = x_3, \quad x_2' = x_4 \quad (\text{так что } x_1'' = x_3', \quad x_2'' = x_4')$$

система уравнений второго порядка (27) может быть преобразована в эквивалентную систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка.

<sup>14</sup> Система координат, вращающаяся относительно инерциальной системы, является неинерциальной. В неинерциальной системе на тело действуют также силы инерции (переносная и кориолисова). Поэтому во втором законе Ньютона для неинерциальной системы необходимо учитывать два дополнительных слагаемых — переносную силу инерции и кориолисову силу инерции. Этим силам соответствует переносное и кориолисово ускорение. В случае вращающейся системы координат нужно учитывать центростремительное и кориолисово ускорения. — *Примеч. ред.*



**Рис. 4.3.9.** Орбита искусственного спутника Аполлон вокруг системы, состоящей из двух небесных тел — Земли и Луны, при начальной скорости  $v_0 = 7476$  км/ч



**Рис. 4.3.10.** Орбита искусственного спутника Аполлон вокруг системы, состоящей из двух небесных тел — Земли и Луны, при начальной скорости  $v_0 = 7365$  км/ч

Предположим, что спутник первоначально движется по круговой орбите радиуса 2400 км вокруг Луны по часовой стрелке. В самой дальней точке его траектории от Земли ( $x_1 = 0,994$ ) его “запускают” на орбиту вокруг системы, состоящей из двух тел — Земли и Луны, с начальной скоростью  $v_0$ . Тогда соответствующие начальные условия можно записать так:

$$x_1(0) = 0,994, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = -v_0.$$

Чтобы получить численное решение системы (27) с помощью пакета MATLAB, можно использовать адаптивный метод с переменной величиной шага `ode45`. Орбиты на рис. 4.3.9 и 4.3.10 были получены при

$$v_0 = 2,031732629557 \quad \text{и} \quad v_0 = 2,001585106379,$$

соответственно. (В наших единицах измерения, единица скорости равна приблизительно 3680 км/ч.) Хотя в каждом случае траектория вокруг Луны и Земли получается замкнутой с многими циклами (нечто вроде петляющего автобусного маршрута), но даже (относительно) незначительное изменение начальной скорости изменяет количество циклов! Дополнительная информация содержится в докладе NASA, посвященном изучению численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, подготовленном О. Б. Фрэнсисом-мл. с соавторами (O. B. Francis, Jr. et al.) для Центра управления Космическими полетами NASA (NASA–George C. Marshall Space Flight Center) 7 июня 1966 года (NASA Contractor Report CR-61139, “Study of the Methods for the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations”).

### 4.3. Задачи

Для решения задач 1–8 вполне подойдет карманный калькулятор. В каждой из задач даны задача Коши (задача с начальными условиями) и точное ее решение. Найдите приблизительные значения  $x(0,2)$  и  $y(0,2)$  тремя способами: (а) с помощью метода Эйлера за два шага при величине шага

**394** Глава 4. Введение в системы дифференциальных уравнений

$h = 0,1$ ; **(b)** с помощью усовершенствованного метода Эйлера за один шаг  $h = 0,2$ ; **(c)** с помощью метода Рунге–Кутты за один шаг при величине шага  $h = 0,2$ . Сравните полученные приближенные значения с точными значениями  $x(0,2)$  и  $y(0,2)$ .

- |   |   |
|---|---|
| <p>1. <math>x' = x + 2y, x(0) = 0,</math><br/> <math>y' = 2x + y, y(0) = 2;</math><br/> <math>x(t) = e^{3t} - e^{-t}, y(t) = e^{3t} + e^{-t}</math></p> <p>3. <math>x' = 3x + 4y, x(0) = 1,</math><br/> <math>y' = 3x + 2y, y(0) = 1;</math><br/> <math>x(t) = \frac{1}{7}(8e^{6t} - e^{-t}),</math><br/> <math>y(t) = \frac{1}{7}(6e^{6t} + e^{-t})</math></p> <p>5. <math>x' = 2x - 5y, x(0) = 2,</math><br/> <math>y' = 4x - 2y, y(0) = 3;</math><br/> <math>x(t) = 2 \cos 4t - \frac{11}{4} \sin 4t,</math><br/> <math>y(t) = 3 \cos 4t + \frac{1}{2} \sin 4t</math></p> <p>7. <math>x' = 3x - y, x(0) = 2,</math><br/> <math>y' = x + y, y(0) = 1;</math><br/> <math>x(t) = (t + 2)e^{2t},</math><br/> <math>y(t) = (t + 1)e^{2t}</math></p> | <p>2. <math>x' = 2x + 3y, x(0) = 1,</math><br/> <math>y' = 2x + y, y(0) = -1;</math><br/> <math>x(t) = e^{-t}, y(t) = -e^{-t}</math></p> <p>4. <math>x' = 9x + 5y, x(0) = 1,</math><br/> <math>y' = -6x - 2y, y(0) = 0;</math><br/> <math>x(t) = -5e^{3t} + 6e^{4t},</math><br/> <math>y(t) = 6e^{3t} - 6e^{4t}</math></p> <p>6. <math>x' = x - 2y, x(0) = 0,</math><br/> <math>y' = 2x + y, y(0) = 4;</math><br/> <math>x(t) = -4e^t \sin 2t,</math><br/> <math>y(t) = 4e^t \cos 2t</math></p> <p>8. <math>x' = 5x - 9y, x(0) = 0,</math><br/> <math>y' = 2x - y, y(0) = -1;</math><br/> <math>x(t) = 3e^{2t} \sin 3t,</math><br/> <math>y(t) = e^{2t}(\sin 3t - \cos 3t)</math></p> |
|---|---|

Для решения остальных задач этого раздела необходим компьютер. В задачах 9–12 даны задача Коши (задача с начальными условиями) и ее точное решение. В каждой из этих четырех задач методом Рунге–Кутты с величиной шага  $h = 0,1$  и  $h = 0,05$  найдите приближения с пятью десятичными знаками значений  $x(1)$  и  $y(1)$ . Сравните аппроксимации с фактическими значениями.

- |   |  |
|---|--|
| <p>9. <math>x' = 2x - y, x(0) = 1,</math><br/> <math>y' = x + 2y, y(0) = 0;</math><br/> <math>x(t) = e^{2t} \cos t,</math><br/> <math>y(t) = e^{2t} \sin t</math></p> <p>11. <math>x' = -x - y - (1 + t^3)e^{-t}, x(0) = 0,</math><br/> <math>y' = -x - y - (t - 3t^2)e^{-t}, y(0) = 1;</math><br/> <math>x(t) = e^{-t}(\sin t - t), y(t) = e^{-t}(\cos t + t^3)</math></p> | <p>10. <math>x' = x + 2y, x(0) = 0,</math><br/> <math>y' = x + e^{-t}, y(0) = 0;</math><br/> <math>x(t) = \frac{1}{9}(2e^{2t} - 2e^{-t} + 6te^{-t}),</math><br/> <math>y(t) = \frac{1}{9}(e^{2t} - e^{-t} + 6te^{-t})</math></p> <p>12. <math>x'' + x = \sin t, x(0) = 0;</math><br/> <math>x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)</math></p> |
|---|--|

13. Предположим, что арбалетная стрела была пущена вертикально вверх с начальной скоростью 288 футов/с. Если ее торможение (замедление) из-за сопротивления воздуха равно  $(0,04)v$ , то ее высота  $x(t)$  является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$x'' = -32 - (0,04)x'; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 288.$$

Найдите максимальную высоту, которой достигает стрела, и время, требуемое, чтобы достичь этой высоты.

14. Решите задачу 13, но предположите теперь, что торможение (замедление) стрелы из-за сопротивления воздуха равно  $(0,0002)v^2$ .
15. Предположим, что снаряд был запущен вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0$  с поверхности Земли. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то высота снаряда  $x(t)$  в момент времени  $t$  является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(x + R)^2}; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0.$$

Используйте значение ускорения свободного падения  $g = 32,15$  футов/с<sup>2</sup>  $\approx 0,006089$  миль/с<sup>2</sup> на землю у ее поверхности и значение радиуса Земли  $R = 3960$  миль. При  $v_0 = 1$  миль/с найдите максимальную высоту, достигнутую снарядом, и время, необходимое для подъема на эту высоту.

В задачах 16–18 рассматривается бейсбольный мяч из примера 4, пущенный с начальной скоростью 160 футов/с, причем коэффициент сопротивления воздуха равен  $c = 0,0025$ .

16. Найдите *дальность* — расстояние по горизонтали, которое мяч пролетит до падения на землю, — и полное время полета, если угол наклона траектории в начальный момент был равен  $40^\circ$ ,  $45^\circ$  или  $50^\circ$ .
17. Найдите начальный угол наклона траектории (ближайшее целое значение в градусах), при котором дальность полета будет максимальной. При условии отсутствия сопротивления воздуха он был бы равен в точности  $45^\circ$ , однако ваш ответ должен быть меньше  $45^\circ$ .
18. Найдите начальный угол наклона траектории (с точностью до половины градусов), больший  $45^\circ$ , при котором дальность полета равна 300 футов.
19. Пусть  $c = 0,0025$ , а угол наклона траектории бейсбольного мяча, по которому ударила малышка Бейб Рут (Babe Ruth), в начальный момент равен  $40^\circ$ . Найдите начальную скорость бейсбольного мяча после удара, если мяч ударился в открытую трибуну на высоте 50 футов на расстоянии 500 футов по горизонтали от точки удара.
20. Арбалетная стрела из задачи 14 выпущена с той же начальной скоростью 288 футов/с, причем из-за сопротивления воздуха замедление (торможение) равно  $(0,0002)v^2$  и направлено против движения. Предположим, что эта стрела запущена с уровня земли под углом  $45^\circ$ . Определите максимальную высоту, дальность и продолжительность полета стрелы.
21. Артиллерийский снаряд запущен с уровня земли с начальной скоростью 3000 футов/с, причем угол наклона траектории в начальный момент равен  $40^\circ$ . Предположим также, что замедление (торможение) из-за сопротивления воздуха равно  $(0,0001)v^2$ . (а) Какова дальность полета снаряда и полное время его полета? Какова его скорость при соударении с землей? (б) Какова максимальная высота подъема снаряда и когда эта высота достигается? (в) Вы обнаружите, что в самой высокой точке своей траектории снаряд продолжает терять скорость. Какой *минимальной* скорости достигает снаряд во время спуска?

### 4.3. Приложение. Кометы и космические корабли

На рис. 4.3.11 приведены две версии двумерной программы RK2DIM, реализующей метод Рунге–Кутты. Одна версия предназначена для калькулятора TI-85, а вторая написана на языке программирования BASIC. Вы должны обратить внимание, что эти версии очень похожи на приведенные на рис. 2.6.11 аналогичные версии одномерной программы, реализующей метод Рунге–Кутты, за исключением того, что (в соответствующих местах) одна строка заменена двумя (для вычисления *пары* значений наклонов для функций  $x$  и  $y$ ). Заметим также, что используемая система обозначений по существу совпадает с уравнениями (13) и (14) из этого раздела. В нескольких первых строках определены функции и начальные данные из примера 1.

На рис. 4.3.12 приведена алгоритм реализации метода Рунге–Кутты для систем из  $n$  уравнений на входном языке пакета MATLAB. В функции  $f$ , написанной на входном языке пакета MATLAB, определяется вектор правых частей решаемой системы дифференциальных уравнений в  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ . Функция  $rk_n$  в качестве входных параметров принимает начальное значение  $t$  (параметр  $t$ ), вектор-столбец начальных значений  $\mathbf{x}$  (параметр  $\mathbf{x}$ ), конечное значение  $t$  (параметр  $t1$ ) и желаемое количество подынтервалов (параметр  $n$ ). В результате выполнения она генерирует вектор-столбец  $T$  значений  $t$  и матрицу  $X$ , строки которой задают соответствующие значения  $\mathbf{x}$ . Например, если функция  $\mathbf{f}$  определена так, как показано на рисунке, команда MATLAB

| TI-85                       | BASIC                        | Комментарии            |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------|
| PROGRAM:RK2DIM              | Program RK2DIM               | Заголовок программы    |
| :F=Y                        | DEF FN F(T,X,Y) = Y          | Определение функции f  |
| :G=-X                       | DEF FN G(T,X,Y) = -X         | Определение функции g  |
| :50→N                       | N = 50                       | Количество шагов       |
| :0→T                        | T = 0                        | Начальное значение t   |
| :0→X                        | X = 0                        | Начальное значение x   |
| :1→Y                        | Y = 1                        | Начальное значение y   |
| :5→T1                       | T1 = 5                       | Конечное значение t    |
| :(T1-T)/N→H                 | H = (T1-T)/N                 | Величина шага          |
| :For(I,1,N)                 | FOR I=1 TO N                 | Начало цикла           |
| :T→T0                       | T0 = T                       | Сохранить предыдущее t |
| :X→X0                       | X0 = X                       | Сохранить предыдущее x |
| :Y→Y0                       | Y0 = Y                       | Сохранить предыдущее y |
| :F→F1                       | F1 = FNF(T,X,Y)              | Первый наклон f        |
| :G→G1                       | G1 = FNG(T,X,Y)              | Первый наклон g        |
| :T0+H/2→T                   | T = T0 + H/2                 | t в середине           |
| :X0+H*F1/2→X                | X = X0 + H*F1/2              | Прогноз x в середине   |
| :Y0+H*G1/2→Y                | Y = Y0 + H*G1/2              | Прогноз y в середине   |
| :F→F2                       | F2 = FNF(T,X,Y)              | Второй наклон f        |
| :G→G2                       | G2 = FNG(T,X,Y)              | Второй наклон g        |
| :X0+H*F2/2→X                | X = X0 + H*F2/2              | Прогноз x в середине   |
| :Y0+H*G2/2→Y                | Y = Y0 + H*G2/2              | Прогноз y в середине   |
| :F→F3                       | F3 = FNF(T,X,Y)              | Третий наклон f        |
| :G→G3                       | G3 = FNG(T,X,Y)              | Третий наклон g        |
| :T0+H→T                     | T = T0 + H                   | Новое значение t       |
| :X0+H*F3→X                  | X = X0 + H*F3                | Прогноз x в конце      |
| :Y0+H*G3→Y                  | Y = Y0 + H*G3                | Прогноз y в конце      |
| :F→F4                       | F4 = FNF(T,X,Y)              | Четвертый наклон f     |
| :G→G4                       | G4 = FNG(T,X,Y)              | Четвертый наклон g     |
| :(F1+2*F2+2*F3<br>+F4)/6→FA | FA = (F1+2*F2+2*F3<br>+F4)/6 | Средний наклон f       |
| :(G1+2*G2+2*G3<br>+G4)/6→GA | GA = (G1+2*G2+2*G3<br>+G4)/6 | Средний наклон g       |
| :X0+H*FA→X                  | X = X0 + H*FA                | Поправка x             |
| :Y0+H*GA→Y                  | Y = Y0 + H*GA                | Поправка y             |
| :Disp T,X,Y                 | PRINT T,X,Y                  | Вывод результатов      |
| :End                        | NEXT I                       | Конец цикла            |

**Рис. 4.3.11.** Программы, реализующие метод Рунге–Кутты для двумерных систем на калькуляторе TI-85 и на языке BASIC

---

```

function xp = f(t,x)
xp = x;
xp(1) = x(2);
xp(2) = -x(1);

function [T,Y] = rkn(t,x,t1,n)
h = (t1 - t)/n;           % величина шага
T = t;                   % начальное значение
t
X = x';                  % начальный вектор x
for i = 1:n              % начало цикла
    k1 = f(t,x);         % первый вектор k
    k2 = f(t+h/2,x+h*k1/2); % второй вектор k
    k3 = f(t+h/2,x+h*k2/2); % третий вектор k
    k4 = f(t+h,x+h*k3); % четвертый вектор k
    k = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6; % вектор средних k
    t = t + h;           % новое значение t
    x = x + h*k;         % новое значение x
    T = [T;t];           % обновить столбец t
    X = [X;x'];         % обновить матрицу x
end                       % конец цикла

```

---

**Рис. 4.3.12.** Реализация метода Рунге–Кутты на входном языке пакета MATLAB

```
[T,X] = rkn(0, [0;1], 5, 50)
```

генерирует данные, приведенные в таблице на рис. 4.3.1 (приведено каждое пятое значение переменных).

Для проверки вашей собственной реализации метода Рунге–Кутты можно использовать примеры 1–3 из этого раздела. Затем решите задачи о кометах и приведенные ниже задачи о космических кораблях. Дополнительный прикладной материал содержится также на сайте [www.prenhall.com/edwards](http://www.prenhall.com/edwards). Сайт содержит описание дополнительных исследований по решению обыкновенных дифференциальных уравнений числовыми методами. В качестве модельных задач рассматриваются самые разнообразные задачи — от задач о полете бейсбольного мяча до задач определения траекторий полета космического корабля Аполлона (результаты этих вычислений — орбиты Аполлона — показаны на рис. 4.3.9 и 4.3.10).

### Посадка вашего космического корабля

Ваш космический корабль движется с постоянной скоростью  $V$ , приближаясь к далекой планете земного типа, масса которой равна  $M$ , а радиус —  $R$ . Тормозная система вашего космического корабля во включенном состоянии обеспечивает постоянную тягу  $T$  до соударения с поверхностью планеты. Во время замедления от вашего корабля до центра планеты  $x(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} = T - \frac{GM}{x^2}, \quad (1)$$

где  $G \approx 6,6726 \times 10^{-11}$  Н·(м/кг)<sup>2</sup>, как и в примере 3. Вы хотите узнать, на какой высоте над поверхностью необходимо включить тормозную систему, чтобы посадка на планету была мягкой? В качестве правдоподобной задачи можно взять

$$\begin{aligned}M &= 5,97 \times 10^{24} \text{ (кг)}, \\R &= 6,38 \times 10^6 \text{ (м)}, \\V &= p \times 10^4 \text{ (км/ч)}, \\T &= g + q \text{ (м/с}^2\text{)}\end{aligned}$$

где  $g = GM/R^2$  ускорение свободного падения на поверхности планеты. Выберите в качестве  $p$  наименьшую отличную от нуля цифру в номере вашего студенческого билета, а в качестве  $q$  — следующую по величине. Найдите с точностью до метра высоту, на которой необходимо включить тормозную систему, а также расчетное время спуска с точностью до одной десятой секунды.

### Движение планет и спутников: законы Кеплера

Рассмотрим движение спутника по эллиптической орбите вокруг планеты массой  $M$ . Предположим, что единицы измерения выбраны так, что  $GM = 1$  (где  $G$  — гравитационная постоянная). Если планета расположена в начале координат плоскости  $xy$ , то уравнения движения спутника можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

Пусть  $T$  обозначает период обращения спутника. Согласно третьему закону Кеплера, *квадрат*  $T$  пропорционален кубу большей полуоси  $a$  эллиптической орбиты спутника. В частности, если  $GM = 1$ , то

$$T^2 = 4\pi^2 a^3. \quad (3)$$

Более подробные сведения приведены в разделе 12.6 6-го издания учебника анализа Эдвардса и Пенни, вышедшего в 2002 году (Edwards and Penney, *Calculus*, 6th edition (Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2002)). Если  $x$ - и  $y$ -компоненты скорости спутника обозначить через  $x_3 = x' = x'_1$  и  $x_4 = y' = x'_2$ , то система (2) преобразуется в эквивалентную систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка, имеющую вид (22) из этого раздела.

- (a) Решите численно эту систему размера  $4 \times 4$  при начальных условиях

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

которые теоретически соответствуют круговой орбите радиуса  $a = 1$ ; тогда из равенства (3) следует, что  $T = 2\pi$ . Это ли вы получили?

- (b) Теперь решите численно эту систему при начальных условиях

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{6},$$

которые теоретически соответствуют эллиптической орбите, большая полуось которой равна  $a = 2$ ; тогда из равенства (3) следует, что  $T = 4\pi\sqrt{2}$ . Это ли вы получили?

### Комета Галлея

В последний раз комета Галлея проходила через свой перигелий (ближайшая к Солнцу точка орбиты) 9 февраля 1986 года. (Само Солнце считается расположенным в начале координат.) Координаты и компоненты скорости кометы Галлея в тот момент были равны

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= (0,325514, -0,459460, 0,166229) \quad \text{и} \\ \mathbf{v}_0 &= (-9,096111, -6,916686, -1,305721) \end{aligned}$$

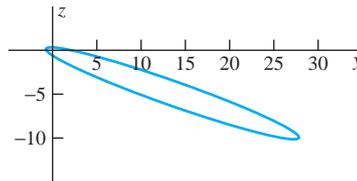
соответственно, причем расстояние здесь выражено в астрономических единицах длины — а.е.д., или просто а.е. (астрономическая единица, т.е. длина большей главной полуоси земной орбиты), а время — в годах. В этих единицах измерения трехмерные уравнения движения кометы имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (4)$$

где

$$\mu = 4\pi^2 \quad \text{и} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Решите численно систему уравнений (4). Сверьте внешний вид проекции орбиты кометы Галлея на плоскость  $yz$  с изображенным на рис. 4.3.13. Начертите также проекции на плоскости  $xy$  и  $xz$ .

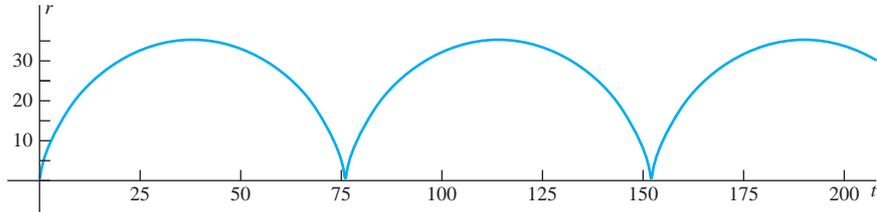


**Рис. 4.3.13.** Проекция орбиты кометы Галлея на плоскость  $yz$

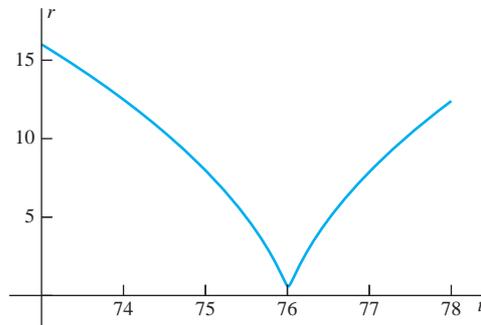
На рис. 4.3.14 изображен график расстояния  $r(t)$  кометы Галлея от Солнца. На графике видно, что при прохождении через афелий (наиболее удаленная от Солнца точка орбиты) комета Галлея будет удалена на максимальное расстояние от Солнца, приблизительно равное 35 а.е., причем расстояние от перигелия до афелия комета Галлея преодолевает за время, немного меньшее, чем 40 лет, и снова вернется в перигелий примерно через три четверти века (после предыдущего прохождения перигелия). На увеличенном участке графика, приведенном на рис. 4.3.15, видно, что период обращения кометы Галлея приблизительно равен 76 лет. Используйте ваше численное решение для уточнения этих данных. Постарайтесь наиболее точно вычислить календарную дату следующего прохода кометы Галлея через ее перигелий?

### Ваша собственная комета

В ночь перед вашим днем рождения в 1997 году вы установили свой телескоп на вершине недалеко расположенной от вашего дома горы. Ночь была ясной, безоблачной, звездной и вам улыбнулась фортуна: в 0 часов 30 минут ночи вы заметили новую комету. После повторных



**Рис. 4.3.14.** График расстояния  $r(t)$  от кометы Галлея до Солнца на протяжении 200 лет. Есть ли пересечение около точки  $t = 75$ ?



**Рис. 4.3.15.** Увеличенный участок графика при проходе кометы Галлея через перигелий приблизительно через 76 лет

наблюдений в следующие ночи вам удалось вычислить ее координаты в ту первую ночь: координаты в гелиоцентрической системе координат:  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  и вектор скорости  $\mathbf{v}_0 = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$ . Используя эти данные, определите

- расстояние кометы от Солнца в перигелии (самая близкая к Солнцу точка орбиты) и в афелии (самая дальняя от Солнца точка орбиты);
- скорости кометы при прохождении через перигелий и через афелий;
- период обращения кометы вокруг Солнца;
- следующие две даты прохождения кометы через перигелий.

Если измерять расстояние в астрономических единицах, а время — в годах, то уравнения движения кометы примут вид (4). Для вашей собственной кометы выберите произвольные начальные координаты и скорости того же порядка, что и у кометы Галлея. В случае необходимости повторно осуществляйте произвольный выбор начального положения и вектора скорости до тех пор, пока не получите правдоподобную эксцентрическую орбиту, выходящую за пределы орбиты Земли (как у большинства настоящих комет).