ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие вводные курсы дифференциальных уравнений еще в недалеком прошлом были ориентированы на формальное решение стандартных типов дифференциальных уравнений. Поэтому в них значительную долю составляли систематические методы (кажущиеся такими простыми в усвоении) поиска решения. Многие студенты концентрировались на изучении и запоминании методов решения уравнений знакомых типов. Однако данный учебник базируется на опыте преподавания курса, в котором большой акцент делается на концептуальных идеях и использовании программ-приложений и овладении студентами вычислительных средств для приобретения более широкого опыта решения задач.

Доступность технических вычислительных сред, подобных *Maple*, *Mathematica* и MATLAB, изменяет роль дифференциальных уравнений и возможности их применения в науке и инженерном деле, и именно это обстоятельство нашло отражение в данном учебнике. Новая технология мотивирует сдвиг акцента с традиционных ручных (с карандашом и бумагой) методов на качественные и машинные, которые

- позволяют расширить диапазон реальных приложений;
- позволяют использовать как вычисления, так и средства графической визуализации для углубленного понимания концепций;
- поощряют эмпирические исследования, которые позволяют глубже обдумать и провести более глубокий анализ, чем стандартные задачи учебника.

Главные особенности

Следующие особенности этого учебника предназначены для поддержки современного курса дифференциальных уравнений, в котором, помимо традиционных основных навыков, студенты знакомятся с концептуальными перспективами, которые понадобятся студентам для эффективного использования дифференциальных уравнений в их последующей работе и учебе.

- Редко используемые темы были сильно сокращены, а новые темы добавлены, чтобы сконцентрировать внимание как на основных методах, так и на качественных аспектах темы, связанных с полями направлений, интегральными кривыми, фазовыми портретами и динамическими системами. Мы объединяем символические, графические и численные методы решения везде, где это кажется выгодным. Свежий вычислительный подход очевиден в рисунках, примерах, задачах и приложениях всюду по тексту. Приблизительно 15% примеров в тексте новы или недавно исправлены для этого издания.

- В книге большое внимание уделяется линейным системам дифференциальных уравнений, которые рассмотрены в главах 4 и 5 (вместе с необходимыми сведениями из линейной алгебры), после которых в главе 6 рассматриваются нелинейные системы и явления (включая хаос в динамических системах).
- Эта книга начинается и заканчивается обсуждением и примерами математического моделирования явлений реального мира. Студенты учатся с помощью математического моделирования и эмпирических исследований выводить уравнения, решать их и извлекать полезную информацию из решения.
- Первый курс дифференциальных уравнений должен быть также окном в мир математики. Хотя в элементарном курсе нельзя изложить доказательства фундаментальных теорем существования и единственности, студенты должны знать точные и четкие формулировки этих теорем и понимать их роль в теории. Мы включаем соответствующее доказательство существования и единственности в приложение и иногда отсылаем к нему читателя по ходу изложения.
- Хотя наш подход основан на широком использовании новых распространенных компьютерных методов решения дифференциальных уравнений, студентов важно научить и некоторым элементарным аналитическим методам решения (рассмотренным в главах 1 и 3). Эффективное и надежное использование численных методов часто требует предварительного анализа с помощью стандартных элементарных методов; построение реалистической числовой модели часто базируется на изучении более простой аналитической модели. Мы поэтому продолжаем подчеркивать важность овладения мастерством традиционных методов решения (особенно акцентируя внимание на них в обширных наборах задач).

Особенности вычислительного подхода

Следующие особенности подчеркивают особенности вычислительной технологии, которая отличает большую часть нашего описания.

- Для этого издания создано почти 700 *машинно-генерируемых рисунков*, причем более половины из них совершенно новые. В большинстве своем они сгенерированы с помощью пакетов *Mathematica* и MATLAB. На них показаны высококачественные изображения полей направлений, интегральных кривых и фазовых портретов, которые “оживляют” символические решения дифференциальных уравнений. Например, графики на обложке изображают собственную функцию трехмерного волнового уравнения, которое описывает поверхностные волны на сферической планете. Эти графики были созданы с помощью соответствующих функций Лежандра (см. раздел 10.5).
- Приблизительно 45 *прикладных учебных модулей* следуют сразу за ключевыми разделами учебника. В большинстве этих приложений иллюстрируется использование технических средств вычислительных систем; в тексте этих разделов мы стремимся привлечь студентов к активному применению новой технологии.
- Новинкой является акцент на *численных методах*, которые представлены довольно ранним введением числовых методов решения в главе 2 (посвященной математическим моделям и численным методам). Здесь и в главе 4 рассматриваются численные методы решения систем уравнений, причем конкретная реализация численных алго-

ритмов представлена для систем уравнений параллельно для различных компьютерных средств — от графических калькуляторов до MATLAB.

- *Основные понятия* демонстрируются с помощью вычислительных средств, что позволяет более кратко и более просто, чем при традиционном подходе, охватить в главах 1, 3 и 5 некоторые традиционные физические темы (подобные точным уравнениям и вариации параметров).

Математическое моделирование

Математическое моделирование — цель изучения дифференциальных уравнений, мы постоянно побуждаем студентов заниматься им. Чтобы было легче представить широту тематики приложении, взляните на следующий перечень вопросов, рассмотренных в этом учебнике.

- Как объяснить обычно наблюдаемую задержку времени между ежедневными колебаниями температуры внутри помещения и снаружи? (Раздел 1.5.)
- В чем отличие между Судным Днем и исчезновением популяций аллигаторов? (Раздел 2.1.)
- Почему одноколесный велосипед и двуосный автомобиль по-разному реагируют на неровности дороги? (Разделы 3.7 и 5.3.)
- Как предсказать момент следующего прохода недавно открытой кометы через перигелий? (Раздел 4.3.)
- Почему землетрясение может уничтожить одно здание и совсем не повредить ближайшее к нему? (Раздел 5.3.)
- Что определяет, будут ли два вида жить вместе в гармонии или конкуренция (соревнование) кончится исчезновением одного из них и выживанием другого? (Раздел 6.3.)
- Почему и когда нелинейность приводит к хаосу в биологических и механических системах? (Раздел 6.5.)
- Если по массивному телу на пружине периодически ударять молотком, то как поведение этого массивного тела зависит от частоты ударов молотка? (Раздел 7.6.)
- Почему флагштоки обычно внутри пусты, а не представляют собой сплошное тело? (Раздел 8.6.)
- Как объяснить различия в звучании гитары, ксилофона и барабана? (Разделы 9.6, 10.2 и 10.4.)

Организация и содержание

Мы изменили обычный подход и последовательность тем, чтобы воспользоваться преимуществами новой технологии и открыть новые перспективы. В качестве примеров отметим следующие особенности нашего подхода.

- После конспективного знакомства с уравнениями первого порядка в главе 1 (хотя и с небольшим охватом некоторых традиционных символических методов) в главе 2 вниманию студентов предлагается весьма раннее введение в математическое моделирование, устойчивость и качественные свойства дифференциальных уравнений, а также знакомство с численными методами. При более традиционном подходе во вводном курсе эти темы часто рассеиваются по разным главам.

- В главах 4 и 5 рассматриваются линейные системы. Мотивируемая текущими тенденциями в науке и техническом образовании и практическими соображениями, глава 4 предлагает раннее интуитивное введение в системы первого порядка, модели и численные методы приближенных вычислений. Глава 5 начинается с отдельного независимого раздела, посвященного линейной алгебре, который необходим для того, чтобы затем применить метод собственных значений к линейным системам. Область приложения метода собственных значений весьма обширна (от железнодорожных вагонов до землетрясений). В разделе 5.5 довольно полно представлена теория экспонент от матрицы, которые применяются в разделе 5.6 к неоднородным линейным системам.
- В главе 6, посвященной нелинейным системам и явлениям, понятие фазовой плоскости применяется для изучения самых разнообразных систем — от традиционных экологических и механических системам до хаоса и бифуркации в динамических системах (эти понятия рассмотрены в заключительном разделе). Раздел 6.5 представляет элементарное введение в такие современные темы, как удвоение периода в биологических и механических системах, диаграмма удвоения цикла и странный аттрактор Лоренца (все это иллюстрируется яркой компьютерной графикой).
- Методы преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) (глава 7) и методы степенных рядов (глава 8) следуют за материалом по линейным и нелинейным системам, но могут быть рассмотрены сразу после главы 3 по желанию преподавателя.
- Главы 9 и 10 посвящены приложениям рядов Фурье, разделению переменных и приложениям теории Штурма–Лиувилля к дифференциальным уравнениям в частных производных и задачам, в которых заданы граничные (краевые) значения. После введения ряда Фурье в последних трех разделах главы 9 обсуждаются три классических уравнения — волновое, теплопроводности и уравнение Лапласа. В главе 10 методы Штурма–Лиувилля изучаются настолько подробно, что студенты могут применить их в некоторых довольно важных и вполне реальных приложениях.

Эта книга содержит материал различных по длительности курсов — от одной четверти до двух семестров. Более краткая версия, *Дифференциальные уравнения: вычислительные аспекты и моделирование*, заканчивается главой 7, посвященной методам преобразования Лапласа (изображения по Лапласу). (Таким образом, в этом кратком варианте курса придется опустить материал по методам степенных рядов, рядам Фурье, разделению переменных и дифференциальным уравнениям в частных производных.)

Задачи, приложения и руководства по решению

Почти 20% текста и более чем 1900 задач в тексте были составлены заново для этого издания или совсем недавно заменены с целью добавления графиков или качественной теории. Соответственно раздел ответов теперь включает почти 300 новых машинно-генерируемых рисунков, иллюстрирующих то, что, как ожидается, создадут студенты.

Раздел ответов для этого пересмотренного издания был значительно расширен, чтобы увеличить его значение в качестве помощи при изучении. Теперь он включает ответы на большинство задач с нечетными номерами, плюс очень много ответов на задачи с четными номерами. Руководство для преподавателя *Instructor's Solutions Manual* (0–13–047578–5) (Справочник по решениям для преподавателя), содержащее 625 страниц, содержит решения большей части задач из данной книги, а руководство для студента *Student Solutions Manual* (0–13–047579–3) (Студенческий справочник по решениям), насчитывающее 375 страниц, содержит решения большей части задач с нечетными номерами.

Приблизительно 45 прикладных модулей в тексте содержат дополнительный прикладной материал и проекты, предназначенные в значительной степени для привлечения студентов к исследованию и приложению вычислительных технологий. Эти исследования значительно расширены в 325-страничном справочнике по приложениям *Applications Manual* (0–13–047577–7), который содержит новые исследовательские задачи. Каждый раздел в этом справочнике имеет параллельные подразделы "Using *Maple*" (Использование *Maple*), "Using *Mathematica*" (Использование *Mathematica*) и "Using MATLAB" (Использование MATLAB), которые детализируют применяемые методы для каждой системы и предоставят студентам-пользователям возможность сравнить достоинства и стили различных вычислительных систем.

Справочники по технологии и сайт

Авторами написаны решения и справочники по приложениям, описанные ранее. Кроме того, имеются следующие дополнительные справочники[1] по технологии. Их можно заказать с учебником, указав их номера ISBN.

- Учебник вместе с книгой *Student Solutions Manual* (0–13–114492–8) (Студенческий справочник по решениям)
- Учебник с книгой *Applications Manual* (0–13–114491–X) (Справочник по приложениям)
- Учебник с книгой *Mathematica for Differential Equations: Projects, Insights, Syntax, and Animations* (0–13–114489–8) (Дэвид Калвис, *Mathematica* для решения дифференциальных уравнений: проекты, практика, синтаксис и мультипликации)
- Учебник с книгой Selwyn Hollis, *A Mathematica Companion for Differential Equations* (0–13–178327–0) (Применение системы *Mathematica* для решения дифференциальных уравнений)
- Учебник с книгой Robert Gilbert & George Hsiao, *Maple Projects for Differential Equations* (0–13–178326–2) (Роберт Джилберт и Джордж Хсаяо, Проекты для *Maple* по решению дифференциальных уравнений)
- Учебник с книгой John Polking & David Arnold, *Ordinary Differential Equations Using* MATLAB, 2nd edition (0–13–075668–7) (Джон Полкинг и Дэвид Арнольд, Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью MATLAB, 2-е издание)

Тетради и рабочие листы, поддерживающие эти справочники, а также дополнительное программное обеспечение, включая пакет рабочих листов для *Maple*, содержащий ответы к этому учебнику, составлены Джоном Малоней (John Maloney); их можно загрузить

[1] На английском языке, разумеется. — *Примеч. ред.*

с сайта www.prenhall.com/edwards. Многие рисунки, помещенные в этом учебнике, были сгенерированы компьютером с использованием программ dfield и pplane, написанных на входном языке системы MATLAB Джоном Полкингом (John Polking), причем на сайте имеются ссылки на эти программы. Есть еще один пакет по решению ОДУ на основе MATLAB с весьма внушительными графическими способностями. Это пакет Iode (см. www.math.uiuc.edu/iode). Он также упоминается в данном учебнике.

Благодарности

В подготовке этого пересмотренного издания мы получали огромную помощь и советы следующих очень проницательных рецензентов.

Дэвид Калвис из Колледжа Болдуина-Уоллиса (David Calvis, *Baldwin-Wallace College*)
Мила Сенкл из Северо-Восточного Университета (Mila Cenkl, *Northeastern University*)
Кристофер Френч из Университета штата Иллинойс в Урбана-Шампейн (Christopher French, *University of Illinois at Urbana-Champaign*)
Моисей Гласнер из Пеннского государственного университета (Moses Glasner, *Penn State University*)
Ричард Лоджезен из Университета штата Иллинойс в Урбана-Шампейн (Richard Laugesen, *University of Illinois at Urbana-Champaign*)
Хуан Лопес из Аризонского государственного университета (Juan Lopez, *Arizona State University*)
Джеймс Мозелей из Университета штата Западная Вирджиния в США (James Moseley, *West Virginia University*)
Питер Мача из Технологического института Джорджии (Peter Mucha, *Georgia Institute of Technology*)
Артур Уоссерман из Мичиганского университета (Arthur Wasserman, *University of Michigan*)

Мы благодарим Баяни ДеЛеона (Bayani DeLeon) за его всегда эффективное руководство процессом книжного производства. Мы особенно благодарны нашему редактору, Джорджу Лобеллу (George Lobell) за его обнадеживающую поддержку и советы, которые в значительной степени повлияли на многие аспекты этой книги при ее последовательных переизданиях. И это действительно настоящее удовольствие поблагодарить Денниса Клетзинга (Dennis Kletzing) за его экстраординарное использование системы верстки TEX для придания привлекательного представления тексту и рисункам в этой книге.

C. H. E.
hedwards@math.uga.edu
Athens, Georgia, U.S.A.
(г. Атенс, штат Джорджия, США)

D. E. P.
dpenney@math.uga.edu
Athens, Georgia, U.S.A.
(г. Атенс, штат Джорджия, США)

Предисловие к русскому изданию

После того как Ньютон решил задачу Кеплера, теория обыкновенных дифференциальных уравнений стала одним из основных инструментов математического естествознания. Поэтому математическое образование специалиста любой естественнонаучной специальности не обойдется без курса дифференциальных уравнений. Для многих же естественнонаучных специальностей теория обыкновенных дифференциальных уравнений — вообще центральная в математической составляющей образования. По этой причине существуют многочисленные курсы дифференциальных уравнений, ориентированные на самые разные аудитории — от школьников до аспирантов.

Каким же должен быть первый нормативный курс дифференциальных уравнений? Каждая эпоха давала свой и даже несколько ответов на этот вопрос. Конечно, в XX столетии был создан ряд очень хороших курсов, заслуженно ставших классическими. Тем не менее, ни один из этих курсов (и даже их теоретико-множественное объединение!) не могло удовлетворить запросы будущих специалистов самых разных профилей. Курсы, созданные в начале прошлого века, отражали методы решения дифференциальных уравнений, которые были разработанные математиками в основном для решения физических задач. Для этого были выделены классы (типы) уравнений, решаемые в квадратурах. Однако уже к началу XX столетия была осознана важность уравнений, не решаемых в квадратурах, и возникли вопросы (устойчивость, асимптотическая устойчивость и др.), ответить на которые нужно было независимо от существования решения в квадратурах или специальных функциях. Возникла даже новая ветвь — качественная теория дифференциальных уравнений. А в 1930-х годах стало абсолютно понятно, что дифференциальные уравнения играют важную роль и в автоматике. Притом эта роль оказалась настолько важной, что ее пришлось отразить уже во вводном (первом) курсе дифференциальных уравнений. В 40–50-х годах приходилось решать такое разнообразное множество дифференциальных уравнений, что уже нельзя было полагаться на заранее заготовленные аналитические методы решения дифференциальных уравнений хорошо изученных типов и на ручное применение немногочисленных разработанных к тому времени численных методов. Численное решение дифференциальных уравнений — пожалуй, одна из самых важных (если не самая важная) задач, ради которых и было начато создание первых автоматических цифровых вычислительных машин. И поэтому естественно, что в лучших курсах дифференциальных уравнений 1940–50-х годов численные методы нашли более полное отражение, чем в предыдущие десятилетия. В 60–70-е годы дифференциальные уравнения становятся важным инструментом не только в теории автоматического регулирования, но и в исследовании динамических систем и хаотических явлений. И в эти же годы выявляются недостатки численных методов, подчас приводящие к техногенным катастрофам. Выясняется, что роль аналитических методов была незаслуженно преуменьшена. В 1980-е годы дифференциальные уравнения активно используются для построения самых разных моделей — физических, экономических, биологических, географических, экологических, геологических и многих других.

К концу второго тысячелетия стало понятно, что вводный курс дифференциальных уравнений нельзя построить, механически опустив одну из упомянутых выше тем. Но как вместить их все в ограниченный по объему (одно- или двухсеместровый, только 100 академических часов) первый вводный курс дифференциальных уравнений?

Предлагаемая вашему вниманию книга как раз и есть ответ на этот вопрос, притом, по нашему мнению, один из лучших. Вкратце отметим те особенности книги, благодаря которым авторам как раз и удалось вместить весьма обширный материал в первом вводном годовом (или даже семестровом) курсе дифференциальных уравнений.

Во-первых, авторы книги не ставят задачу перечислить (фактически неисчислимое) множество моделей. Вместо этого они учат студентов строить такие модели самостоятельно, притом в самых разных областях знания — как естественнонаучных (механика, физика, химия, биология), так и гуманитарных (социология, статистика).

Во-вторых, авторы не занимаются (бесполезным) натаскиванием в решении многочисленных типов дифференциальных уравнений, а учат студентов использовать математические пакеты (в первую очередь это *Mathematica*), в которых интегрированы многочисленные методы (численные и аналитические) решения дифференциальных уравнений. Именно благодаря этому авторам удалось вместить в этот курс все то, что должны узнать инженеры из вводного курса дифференциальных уравнений, а не сконцентрироваться на одной (хотя бы и весьма важной!) теме курса дифференциальных уравнений. По этой же причине данный курс будет интересен и студентам математических факультетов университетов: благодаря такому курсу первое знакомство с естественнонаучными приложениями дифференциальных уравнений (да и самими численными методами) не будет омрачено трудоемкими расчетами по численным методам. И именно благодаря такому курсу студенты-математики могут познакомиться со всем разнообразием дифференциальных уравнений, а не ограничиться несколькими (хотя и весьма современными) темами из курса дифференциальных уравнений.

Вероятно, на использовании математических пакетов в первом вводном курсе дифференциальных уравнений стоит остановиться подробнее, потому что это — неотъемлемая часть данного курса. Использование этих пакетов нельзя отложить "на потом" или вынести в отдельный практикум точно так же, как нельзя требовать, чтобы студенты решали дифференциальные уравнения в уме, а уж потом переходили к применению "чернил и бумаги". Нет, при изучении данного курса дифференциальных уравнений студенты постоянно должны пользоваться математическими пакетами — это так же естественно в начале третьего тысячелетия, как и использование "чернил и бумаги" в начале XX века. Дело в том, что такие системы компьютерной алгебры, как *Mathematica* и *Maple*, — это не просто некие вспомогательные средства, нечто вроде универсальных языков программирования. Каждый такой пакет представляет собой не просто язык программирования, а еще и справочную систему, настоящую (как правило, весьма полную) энциклопедию по дифференциальным уравнениям. В этих пакетах содержатся сведения и методы, которые по необходимости из-за ограниченного объема первого курса дифференциальных уравнений опускаются в учебнике (и на лекциях), но которые совершенно необходимы для изучения моделей — как рассматриваемых в учебнике и на лекциях, так и построенных студентами самостоятельно. Поэтому на лекциях студенты не должны отвлекаться на написание конспектов (выдать их в начале семестра — это обязанность лектора, точнее факультета), а с помощью своих ноутбуков активно изучать модели, предлагаемые лектором. Именно активное использование таких систем компьютерной алгебры, как *Mathematica* и *Maple*, позволяет тренировать студентов не столько в умении производить нудные вычисления, сколько в умении изучать реальные математические модели и сосредоточиться на изучении существенных (с точки зрения современной теории дифференциальных уравнений) особенностей построенных студентами моделей. Даже если лектор из-за ограниченности объема курса и пропустит какой-нибудь метод, нужный для изучения конкретной модели, система компьютерной алгебры *Mathematica* (или *Maple*) о нем (как правило) знает и поможет студенту воспользоваться таким методом. Зато лектор может поставить перед студентом действительно важный вопрос о качественном поведении изучаемой системы. Более того, преподаватель (при наличии времени, например, в годовом курсе) может привлекать студентов к разработке не только индивидуальных проектов, но и групповых. В них он сможет ставить задачу изучения системы с разных точек зрения, иногда такие задания полезно давать так, чтобы они упредили изучение теории, излагаемой в лекционном курсе. Тогда студенты будут лучше подготовлены к изучению самых современных разделов теории дифференциальных уравнений, таких как, например, хаос в динамических системах. Более того, при таком подходе студенты будут готовы к самостоятельному дальнейшему применению математических моделей. И позвольте нам выразить надежду, что тем самым они будут готовы попытаться объять необъятное! И именно на этой ноте мы желаем вам интересного, активного и несомненно увлекательного чтения.

В. Штонда,
viktor@shtonda.com

Я. Шмидский,
smith@dialektika.com