Предисловие

"Аудитория, уровень изложения и трактовка материала — вот для чего предназначены предисловия".
— П. Р. Халмош (P. R. Halmos) [173]

ЭТА КНИГА ОСНОВАНА на одноименном курсе лекций, который ежегодно читается в Станфордском университете начиная с 1970 года. Каждый год его прослушивают около пятидесяти человек — студентов как средних, так и старших курсов, но в первую очередь дипломников (а многие из наших выпускников уже начали вводить такого рода курсы и в других местах). По-видимому, настала пора представить материалы курса более широкой аудитории (включая студентов младших курсов).

"Отдельные лица приобретают дешевый авторитет, оснастив свою речь жаргоном: они могут проповедовать и выставлять напоказ поверхностные суждения. Но от математиков-профессионалов требуются не разглагольствования и даже не степень осведомленности в тех или иных математических вопросах, а готовность применять свои знания и способность реально решать возникающие на практике математические задачи. Короче говоря, мы ждем дел, а не слов".
— Дж. Хаммерсли (J. Hammersley) [176]

Конкретная математика зарождалась в смутное и неспокойное десятилетие. В те бурные годы подвергалось сомнениям все, включая казавшиеся до этого незыблемыми ценности. Студенческие городки превращались в арены жарких баталий. Оспаривались сами учебные программы, и математика не могла быть исключением. Как раз в те годы Джон Хаммерсли (John Hammersley) написал свою полемическую статью "О снижении уровня математической подготовки в школах и университетах благодаря 'современной математике' и подобной ей жидкой интеллектуальной похлебке" [176]; другие обеспокоенные математики [332] даже задавались вопросом "А можно ли спасти математику?" Когда один из авторов этой книги (Д.Э.К.) задумал серию книг под названием *Искусство программирования*, то при написании первого тома он обнаружил, что в его арсенале отсутствуют самые важные инструменты. Математика, которую он изучал в колледже в качестве профильной дисциплины, разительно отличалась от той математики, которая требовалась для досконального, обоснованного понимания компьютерных программ. Поэтому он ввел новый курс, содержащий материал, который хотел бы в свое время прослушать сам.

Новый курс с самого начала получил название "конкретная математика" — сперва как противопоставление "абстрактной математике", поскольку конкретные классические результаты очень быстро выметались из современного математического образования новой метлой абстрактных идей, популярно именовавшихся "новоматом" ("New Math"). Абстрактная математика — чудесный предмет, в котором нет ничего плохого: она красива, обща и полезна. Однако ее приверженцы впали в опасное заблуждение: они решили, что вся остальная математика ниже ее, занимает подчиненное положение и не заслуживает особого внимания. Погоня за общностью оказалась столь захватывающей, что стала самоцелью для целого поколения математиков, которые потеряли способность находить красоту в частностях, в том числе получать удовольствие от решения численных задач или по достоинству оценивать роль математических методов. Абстрактная математика стала вырождаться и терять связь с действительностью. Математическому образованию срочно потребовался конкретный противовес для восстановления равновесия.

Когда Д.Э.К. приступал к чтению курса конкретной математики в Стэнфордском университете, он пояснял несколько странное название курса тем, что это попытка преподавания в стиле “хард” вместо “софт”. Он объявил, что, в отличие от своих коллег, он *не* намерен излагать ни теорию агрегатов, ни теорему вложения Стоуна, ни даже компактификацию Стоуна–Чеха. (Несколько студентов факультета гражданского строительства потихоньку покинули аудиторию.*)

“Сердце математики — в конкретных примерах и конкретных задачах”.
— П. Р. Халмош (P. R. Halmos) [172]

Хотя конкретная математика возникла в качестве реакции на другие тенденции в математике, основные причины ее появления на свет скорее позитивны, нежели негативны. По мере того как этот курс завоевывал себе место под солнцем в учебном процессе, содержание предмета “цементировалось” и доказывало свою ценность в целом ряде новых приложений. Тем временем поступило независимое подтверждение уместности подобного наименования, когда З. А. Мелзак (Z. A. Melzak) опубликовал два тома, озаглавленные *Справочник по конкретной математике* [267].

“Непростительный грех — учить абстрактному до изучения конкретного”.
— З. А. Мелзак (Z. A. Melzak) [267]

На первый взгляд, материал конкретной математики может показаться беспорядочным нагромождением хитроумных трюков, но на самом деле это упорядоченный набор инструментов. Методы конкретной математики обладают не только внутренним единством, но и внешней привлекательностью для множества людей. Когда другой автор этой книги (Р.Л.Г.) впервые прочел этот курс в 1979 году, восторг студентов был столь велик, что они тут же решили продлить это удовольствие еще на год.

Но что же такое конкретная математика на самом деле? Это смесь КОНТИНУАЛЬНОЙ и ДИСКРЕТНОЙ математик. Еще более кон-

Конкретная математика — мост к абстрактной математике.

* Имеется в виду, что название “конкретная математика” (concrete mathematics) в английском языке, помимо смысла “конкретная”, имеет и второй смысл — “бетонная”. — *Примеч. пер.*

кретно — это осмысленное оперирование математическими формулами с использованием определенного набора методов решения задач. После того как вы, читатель, изучите материал данной книги, все, что вам потребуется, — это холодная голова, большой лист бумаги и сносный почерк для вычисления ужасно выглядящих сумм, решения запутанных рекуррентных соотношений и выявления коварных закономерностей в данных. Вы овладеете алгебраической техникой в такой степени, что зачастую вам будет проще получать точные результаты, нежели довольствоваться приближенными ответами, справедливыми лишь в ограниченном смысле.

"Более подготовленный читатель, пропустивший кажущиеся ему слишком элементарными части, может потерять больше, чем менее подготовленный читатель, пропустивший части, кажущиеся слишком сложными".
— Г. Пойа (G. Pólya) [297]

Основные темы книги включают исчисление сумм, рекуррентные соотношения, элементарную теорию чисел, биномиальные коэффициенты, производящие функции, дискретную вероятность и асимптотические методы. Основной упор при этом делается на технической стороне дела, а не на теоремах существования или комбинаторных рассуждениях; цель заключается в том, чтобы сделать каждого читателя настолько осведомленным в дискретных операциях (наподобие вычисления функции "наибольшего целого" или конечной суммы), насколько изучающие анализ знакомы с операциями континуальными (наподобие вычисления функции "абсолютной величины" или определенного интеграла).

Заметим, что этот перечень тем кардинально отличается от того, что в наше время обычно читается в качестве спецкурсов под названием "Дискретная математика". Поэтому наш предмет нуждается в отличительном наименовании, и название "Конкретная математика", право, не хуже любого другого.

Мы недостаточно дерзки для названия "Дистинуальная математика".

130 в русском переводе.
— Переводчик

Первоначальным руководством по конкретной математике для стэнфордского курса послужил раздел "Математическое введение" из *Искусства программирования* [207]. Но изложение на этих 110 страницах было слишком сжатым, поэтому еще один автор (О.П.) загорелся желанием внести большое количество дополнений. Настоящая книга выросла на этих примечаниях: она предваряет и расширяет материал "Математического введения". Некоторые вопросы повышенной сложности опущены; в то же время в книгу включено несколько тем, которых не было ранее и без которых материал был бы неполным.

"... конкретный спасательный круг, брошенный студентам, тонущим в море абстракции".
— У. Готтшалк (W. Gottschalk)

Авторы с удовольствием объединили свои усилия для работы над этой книгой, поскольку ее предмет начал зарождаться и обретать собственную жизнь у них на глазах; кажется, что книга написалась как бы сама собой. Более того, несколько различные подходы каждого автора после нескольких лет совместной работы оказались хорошо пригнанными друг к другу, так что возникает ощущение некоторого манифеста выбранного нами способа занятий математикой. Поэтому мы думаем, что эта книга окажется одой красоте и очарованию математики и что наши читатели разделят с нами хотя бы ϵ того удовольствия, которое мы получили при ее написании.

Поскольку книга родилась в университетской среде, мы попытались передать дух аудитории наших дней, выбрав неформальный стиль изложения. Некоторые полагают, что математика — это серьезное дело, холодное и сухое; но мы считаем ее развлечением и не боимся в этом признаться. Так ли уж необходимо проводить четкую грань между работой и игрой? Конкретная математика полна тому примеров — пусть выполняемые действия и не всегда приятны, зато ответы могут принести удивительную радость. Радости и горести математической работы явно присутствуют в этой книге, поскольку представляют собой часть нашей жизни.

Студенты всегда все знают лучше преподавателей, поэтому мы попросили первых студентов, изучавших этот материал, внести свой вклад в виде "граффити" на полях. Некоторые из этих заметок были попросту банальны, некоторые полны смысла; одни из них предупреждали о двусмысленностях или неясностях, другие оказывались типичными комментариями умников с "Камчатки". Часть замечаний положительна, часть отрицательна, ценность еще одной части попросту нулевая. Но все они, несомненно, отражают реальные чувства читателей, что должно облегчить восприятие книги. (Вдохновляющей идеей для таких пометок на полях послужил справочник *Поступающему в Стэнфорд*, в котором официальной линии университета противопоставляются замечания выпускников. Например, в справочнике сказано: "Есть несколько вещей, которые нельзя пропустить в столь аморфном образовании, каковым является Стэнфорд"; в примечании на полях — "Аморфное образование! Ну и выражения! Вокруг одни типичные псевдоинтеллектуалы". Стэнфорд: "Потенциал совместно проживающих студентов безграничен". Граффити: "Здешние общаги — зоопарк без дворника".)

Математическое граффити:

Килрой не был Хааром.
Освободите группу.
Взорвите ядро.
$N=1 \Rightarrow P=NP$.

Не замечаю за собой интереса к этим замечаниям.

На полях мы также цитируем великих математиков прошлого — подлинные слова, которыми они сообщали о своих фундаментальных открытиях. Представляется уместным привести на одних и тех же страницах слова Лейбница, Эйлера, Гаусса и тех, кому предстоит продолжать их дело. Математика по-прежнему привлекает своих приверженцев, и каждая нить находит свое место в этом богатом полотне.

Это был самый приятный курс из пройденных мною. Но было бы неплохо подытоживать материал по мере продвижения вперед.

Понятно: конкретная математика — это муштра.

В книге имеется более 500 упражнений, разделенных на шесть категорий.

- ***Разминка*** — это упражнения, которые КАЖДЫЙ ЧИТАТЕЛЬ должен попытаться выполнить при первом прочтении материала.
- ***Обязательные упражнения*** предназначены для самостоятельного установления фактов, которые лучше всего усваиваются, если их выводить самому, а не читать о том, как это делали другие.

Домашнее задание заставило выучить большой объем нового материала, так что каждый затраченный час стоил того.

- ***Домашние задания*** представляют собой задачи для углубленного понимания материала той главы, к которой они относятся.
- ***Контрольные работы*** обычно охватывают материал двух и более глав одновременно; в основном они предназначены для неспешного выполнения дома (а не в цейтноте в аудитории).

Домашние контрольные работы вам еще пригодятся — не выбрасывайте их.

- ***Дополнительные задачи*** выходят за рамки ожидаемых возможностей среднего студента, изучающего курс конкретной математики на базе этой книги. Они расширяют текст книги в важных и интересных направлениях.

Контрольные оказались труднее, чем можно было ожидать по домашним заданиям.

- ***Исследовательские проблемы*** могут быть разрешимы человеком (а могут и не быть таковыми), но те из них, которые представлены в книге, стоит попытаться решить (без ограничения времени).

Ответы ко всем этим упражнениям приведены в приложении А, зачастую с дополнительной информацией о родственных результатах. (Конечно же, "ответы" на исследовательские проблемы являются неполными, но даже в этих случаях частичные результаты или указания могут оказаться полезными.) Читателям не возбраняется заглянуть в ответы главным образом разминочных задач, но только ПОСЛЕ серьезных попыток решить задачу самостоятельно, без подсказок.

Лентяи могут сдать курс, просто списывая ответы, но обманут при этом только самих себя.

В приложении Б мы попытались воздать должное первоисточникам каждого упражнения, поскольку составление той или иной поучительной задачи зачастую представляет собой творческий процесс с изрядной долей везения. К сожалению, математики выработали традицию заимствовать упражнения без какой бы то ни было признательности; мы же считаем, что гораздо лучшей является обратная традиция (практикуемая, например, в шахматных книгах и журналах, где принято указывать авторов, дату и место появления оригинальных шахматных задач). Однако мы так и не смогли выявить источники многих задач,

Дополнительные задачи не рассчитаны на студентов, специализирующихся по другим предметам.

ставших частью математического фольклора. Если кому-либо из читателей известно о происхождении того или иного упражнения, ссылка на которое нами пропущена или неточна, мы будем рады получить от него подробную информацию, чтобы исправить упущение в следующих изданиях книги.

Шрифт, которым набраны математические обозначения в книге, — новая разработка Германа Цапфа (Hermann Zapf) [227], заказанная Американским математическим обществом. Она выполнена при содействии комиссии, в состав которой вошли Б. Битон (B. Beeton), Р. Ф. Боас (R. P. Boas), Л. К. Дарст (L. K. Durst), Д. Э. Кнут (D. E. Knuth), Ф. Мердок (P. Murdock), Р. Ш. Пале (R. S. Palais), П. Ренц (P. Renz), Э. Свансон (E. Swanson), С. Б. Уидден (S. B. Whidden) и У. Б. Вульф (W. B. Woolf). Основная идея дизайна Цапфа — отразить особенности написания математических знаков идеальным почерком. Рукописный стиль, в отличие от механического, более естествен, потому что обычно математические формулы выходят из-под пера, куска мела или карандаша. (Примером одного из фирменных признаков этого дизайна является начертание нуля, '0', который слегка заострен сверху, — ведь рукописный нуль редко закругляется в исходной точке.) Буквы расположены прямо, а не наклонно, с тем, чтобы нижние и верхние индексы, а также штрихи, было легче совмещать с обычными символами. Новое семейство шрифтов получило название *AMS Euler*, в честь великого математика Леонарда Эйлера (Leonhard Euler) (1707–1783), открывшего так много в математике из того, что нам известно сегодня. Алфавиты *AMS Euler* включают текстовые (Aa Bb Cc ... Xx Yy Zz), готические ($\mathfrak{A}\mathfrak{a}\,\mathfrak{B}\mathfrak{b}\,\mathfrak{C}\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{X}\mathfrak{x}\,\mathfrak{Y}\mathfrak{y}\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z}$) и рукописные прописные ($\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C} \ldots \mathcal{X}\,\mathcal{Y}\,\mathcal{Z}$) буквы, а также греческие буквы ($\mathrm{A}\alpha\,\mathrm{B}\beta\,\Gamma\gamma \ldots \mathrm{X}\chi\,\Psi\psi\,\Omega\omega$) и специальные символы наподобие $\wp$ и $\aleph$. Нам особенно приятно торжественно представить это семейство шрифтов в нашей книге, поскольку дух Леонарда Эйлера воистину живет на каждой ее странице: конкретная математика — это эйлерова математика!

Значит, вы не видели мой почерк.

Авторы чрезвычайно признательны Андрею Бродеру (Andrei Broder), Эрнсту Мэйру (Ernst Mayr), Эндрю Яо (Andrew Yao) и Френсис Яо (Frances Yao), которые внесли значительный вклад в книгу в те годы, когда они преподавали конкретную математику в Станфорде. Кроме того, мы выражаем 1024 благодарности ассистентам, творчески подошедшим к записи происходившего в аудитории каждый год и помогавшим составлять экзаменационные вопросы; их имена перечислены в приложении В. Эта книга, которая по сути представляет собой конспект всего ценного, прозвучавшего на лекциях за шестнадцать лет, была бы просто невозможна без их первоклассной работы.

Профес, спасибо за (1) шутки и каламбуры, (2) серьезность и содержательность предмета.

Не вижу, где бы я мог применить изученный материал...

Стать реальностью данной книге помогало множество других людей. Например, достойны похвалы студенты университетов Брауна и Райса, Колумбийского, Нью-Йоркского, Принстонского и Стэнфордского университетов, внесшие вклад в виде отобранных для книги граффити и оказавшие помощь в отладке первых черновых версий книги. Наше сотрудничество с издательством Addison-Wesley было особенно эффективным и плодотворным; в частности, мы хотим поблагодарить нашего издателя Питера Гордона (Peter Gordon), технического директора Бет Ааронсон (Bette Aaronson), дизайнера Роя Брауна (Roy Brown) и редактора Лин Дюпре (Lyn Dupré). Неоценимую помощь нам оказали Национальный научный фонд и Отделение военно-морских исследований. При составлении предметного указателя незаменима была Шерил Грэхем (Cheryl Graham). Кроме того, мы хотим поблагодарить наших жен — Фэн, Джилл и Эми — за их терпение, поддержку, ободрение и советы.

С этим предметом было немало хлопот, но я знаю, что он отточил мои математические и умственные способности.

Второе издание книги отличается новым разделом, 5.8, в котором описан ряд важных идей, которые Дорон Зайльбергер (Doron Zeilberger) открыл вскоре после выхода в свет первого издания. Кроме того, исправления к первому изданию встречаются почти на каждой странице.

Мы пытались создать идеальную книгу, но сами мы не идеальны, а потому призываем оказать содействие в исправлении допущенных нами ошибок. Мы с признательностью выплатим премию в сумме 2.56 доллара первому нашедшему любую ошибку в английском оригинальном издании книги, будь то ошибка математическая, историческая или типографская.

Я бы посоветовал случайному студенту держаться от этого курса подальше.

Мюррей-Хилл, Нью-Джерси — Р.Л.Г.
Станфорд, Калифорния Д.Э.К.
Май 1988 и октябрь 1993 года О.П.

От издательства

Вы, читатель этой книги, и есть главный ее критик. Мы ценим ваше мнение и хотим знать, что было сделано нами правильно, что можно было сделать лучше и что еще вы хотели бы увидеть изданным нами. Нам интересно услышать и любые другие замечания, которые вам хотелось бы высказать в наш адрес.

Мы ждем ваших комментариев и надеемся на них. Вы можете прислать нам бумажное или электронное письмо, либо просто посетить наш Web-сервер и оставить свои замечания там. Одним словом, любым удобным для вас способом дайте нам знать, нравится или нет вам эта книга, а также выскажите свое мнение о том, как сделать наши книги более интересными для вас.

Отсылая письмо или сообщение, не забудьте указать название книги и ее авторов, а также свой обратный адрес. Мы внимательно ознакомимся с вашим мнением и обязательно учтем его при отборе и подготовке к изданию последующих книг. Наши координаты:

E-mail: info@williamspublishing.com
WWW: http://www.williamspublishing.com

Адреса для писем из:

России: 127055, г. Москва, ул. Лесная, д. 43, стр. 1
Украины: 03150, Киев, а/я 152

Значения обозначений

ЧАСТЬ СИМВОЛИКИ, используемой в этой книге, (пока еще?) не стала нормой. Вот список обозначений, которые могут быть незнакомы читателям, изучавшим аналогичный материал по другим книгам. В нем указаны номера страниц, на которых эти обозначения разъясняются.

Обозначение	*Смысл*	*Страница*
$\ln x$	Натуральный логарифм: $\log_e x$	339
$\lg x$	Бинарный логарифм: $\log_2 x$	98
$\log x$	Десятичный логарифм: $\log_{10} x$	541
$\lfloor x \rfloor$	Пол: $\max\{n \mid n \leqslant x,$ целое $n\}$	95
$\lceil x \rceil$	Потолок: $\min\{n \mid n \geqslant x,$ целое $n\}$	95
$x \bmod y$	Остаток: $x - y\lfloor x/y \rfloor$	113
$\{x\}$	Дробная часть: $x \bmod 1$	98
$\sum f(x)\,\delta x$	Неопределенная сумма	73
$\sum_a^b f(x)\,\delta x$	Определенная сумма	74
$x^{\underline{n}}$	Убывающая факториальная степень: $x!/(x-n)!$	71, 265
$x^{\overline{n}}$	Возрастающая факториальная степень: $\Gamma(x+n)/\Gamma(x)$	71, 265
$n¡$	Субфакториал: $n!/0! - n!/1! + \cdots + (-1)^n n!/n!$	246
$\Re z$	Действительная часть: x, если $z = x + iy$	91
$\Im z$	Мнимая часть: y, если $z = x + iy$	91
H_n	Гармоническое число: $1/1 + \cdots + 1/n$	50

$H_n^{(x)}$	Обобщенное гармоническое число: $1/1^x + \cdots + 1/n^x$	340
$f^{(m)}(z)$	m-я производная f в точке z	564
$\left[{n \atop m}\right]$	Число Стирлинга первого рода (число циклов)	320
$\left\{{n \atop m}\right\}$	Число Стирлинга второго рода (число подмножеств)	318
$\left\langle{n \atop m}\right\rangle$	Число Эйлера	328
$\left\langle\!\!\left\langle{n \atop m}\right\rangle\!\!\right\rangle$	Число Эйлера второго порядка	331
$(a_m \ldots a_0)_b$	Обозначение для $\sum_{k=0}^{m} a_k b^k$ в системе счисления с основанием b	30
$K(a_1, \ldots, a_n)$	Континуант	367
$F\left({a, b \atop c} \middle\| z\right)$	Гипергеометрическая функция	258
$\#A$	Мощность: количество элементов в множестве A	62
$[z^n]\, f(z)$	Коэффициент при z^n в разложении $f(z)$	249
$[\alpha\,..\,\beta]$	Замкнутый интервал: множество $\{x \mid \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$	102
$[m = n]$	1, если $m = n$, в противном случае — 0*	45
$[m \backslash n]$	1, если m нацело делит n, в противном случае — 0*	137
$[m \backslash\backslash n]$	1, если m напросто делит n, в противном случае — 0*	189
$[m \perp n]$	1, если m взаимно простое с n, в противном случае — 0*	154

В хорошем учебнике по конкретной математике не обойтись без сбивающего с толку списка обозначений.

*В общем случае, если S — некоторое утверждение, которое может быть истинно или ложно, обозначение в квадратных скобках $[S]$ равно 1, если S истинно, и 0 в противном случае.

Повсюду в книге мы используем одинарные кавычки (‘. . . ’) для выделения текста, как он *пишется*, а двойные кавычки (“. . . ”) — для фразы, как она *произносится*. Так, строка букв ‘строка’ называется “строка”.

‘Нестрока’ тоже строка.

Выражение вида ‘a/bc’ означает то же, что и ‘$a/(bc)$’. Кроме того, $\log x/\log y = (\log x)/(\log y)$ и $2n! = 2(n!)$.